

Table des matières

1	Objectifs pédagogiques de la LP	1
2	Objectifs et messages forts de la LP (disciplinaire)	1
3	Introduction générale de la leçon	1
4	Proposition de plan	2
4.1	Les principes variationnels, fondements de la physique	2
4.2	Applications aux milieux à gradient d'indice	2
5	Conclusion et ouvertures possibles :	2
6	Subtilités de la leçon et points disciplinaires essentiels	2
7	Exercices de base et applications intéressantes pour la leçon	2
8	Bibliographie pour construire la leçon	3
9	Expériences illustratives, simulations numériques et exploitation pédagogique	3
10	Critique des choix pédagogiques de la leçon	3

1 Objectifs pédagogiques de la LP

- ▷ Exprimer clairement des principes variationnels.
- ▷ Utiliser les principes variationnels pour mener à bien des calculs de mécanique et d'optique.

2 Objectifs et messages forts de la LP (disciplinaire)

- ▷ Compréhension de l'énonciation principes variationnels qui sont des axiomes physiques ou des reformulations formelles de principes déjà vus.
- ▷ Une grande rigueur lors de l'utilisation d'équations d'Euler-Lagrange, la formulation de fonctionnelles ou la paramétrisation de courbes dans l'espace.
- ▷ Exploitation d'un seul domaine de la physique (ici, l'optique) pour ne pas dériver sur une leçon calculatoire.

3 Introduction générale de la leçon

Aujourd'hui, nous allons nous attaquer à un thème fondateur de la Physique, l'un de ses axiomes les plus profonds, l'un de ses principes élémentaires : l'utilisation de principes variationnels. Si cela fait très longtemps que certains ont été formulés (d'aucuns attribuent cette découverte à Héron d'Alexandrie au premier siècle), ils ont réussi l'exploit à survivre à toutes les révolutions scientifiques et trouvent encore des applications dans nombre de domaines, depuis les télécommunications jusqu'à la relativité générale en passant par l'informatique. Afin de ménager quelque peu nos efforts, nous allons aujourd'hui nous intéresser principalement à montrer comment deux des principes variationnels vont nous permettre d'une part de reconstruire l'entièreté de l'optique géométrique, déjà longuement abordé dans des classes précédentes d'autre part la mécanique classique.

Sans plus attendre, abordons ensemble une courte expérience ! Voici une cuve où l'on a en profondeur une eau abondamment sucrée, et en surface de l'eau pure. Cela, nous y reviendrons, permet de créer un

indice optique différent dans le milieu. S'il semble bien connu que la lumière se déplace en ligne droite dans les espaces isotropes tels que l'air, l'eau ou le plexiglass, il est bien moins évident de trouver sa propagation dans un milieu non homogène. Ces milieux, tel que celui dans cette cuve et que nous expliciterons plus avant plus tard, sont nommés "milieux à gradients d'indice" puisque l'indice dépend des coordonnées d'espace. En utilisant les principes variationnels, nous verrons comment on peut élégamment trouver la trajectoire de la lumière dans ceux-ci.

4 Proposition de plan

4.1 Les principes variationnels, fondements de la physique

- ▶ Du principe de Fermat aux lois de l'optique
- ▶ Du principe de Hamilton aux équations d'Euler Lagrange
- ▶ Equation des rayons lumineux

Transition didactique : Reprenons l'exemple de la cuve...

4.2 Applications aux milieux à gradient d'indice

- ▶ Cuve à gradient d'indice : résolution du problème
- ▶ Les mirages

5 Conclusion et ouvertures possibles :

Au cours de cette leçon, nous avons donc brièvement vu quelques principes variationnels et des applications de ceux-ci. Ils sont loin d'être les seuls, et bien qu'on ait plutôt traité de l'optique avec des incursions dans la mécanique analytique, ces réflexions sont bien plus profondes.

En optimisation numérique, notamment, on définit une fonction "coût", qui peut dépendre d'une multitude de variables, et on cherche le minimum de celle-ci. Pour ceci, on réalise des petites variations des variables, des petits sauts basés sur le gradient de la fonction et on cherche si cela augmente ou diminue le coût en question. On tombe ainsi sur un point optimal.

Autres possibilités : relativité générale (j'espère que vous êtes chauds), autres principes variationnels, principes d'optimalité ou de minimisation...

6 Subtilités de la leçon et points disciplinaires essentiels

- ▷ Bien situer l'édification de principes variationnels dans le cours, notamment si c'est un cours de mécanique analytique et que l'on introduit Euler-Lagrange. Ma proposition est d'avoir déjà introduit Euler-Lagrange à l'aide de la seconde loi de Newton et du principe de d'Alembert. Mais il faut être calé dessus et donner des arguments pédagogiques forts.
- ▷ Bien connaître le paramétrage des courbes et ne pas s'embrouiller dans les calculs (sous peine de cruixification immédiate par le jury).
- ▷ Ne pas se gourer sur l'exploitation de l'expérience avec les angles.

7 Exercices de base et applications intéressantes pour la leçon

- ▷ Un calcul pas cher de courbe en relativité générale ? Aucune idée de où ça peut se trouver, par contre.
- ▷ Caténoïde : équation de la chaînette (composition physique 2009), surface d'un ménisque (cours de Méca flu de cette année)
- ▷ D'autres applications des principes d'optimisation (minimisation de l'énergie pour retrouver la loi d'Ohm, par exemple) se trouvent dans le livre de Basdevant.
- ▷ La fibre à gradient d'indice (Epreuve A 2007).

8 Bibliographie pour construire la leçon

- ▷ *Les principes variationnels en physique. Cours, démonstrations et exercices corrigés*, Jean-Louis Basdevant, 2014.
- ▷ *Ondes lumineuses, propagation, optique de Fourier, Cohérence*, René-Jean Champeau, Renaud Carpentier, Ivan Longere.
- ▷ Pour la mécanique analytique, je me suis contenté de mes cours de L3, il doit y avoir de bons livres que je ne connais pas.

9 Expériences illustratives, simulations numériques et exploitation pédagogique

- ▷ Cuve à gradient d'indice. Il est risqué d'inférer un quelconque modèle de gradient pour la cuve au vu des phénomènes qui s'y passent (décantation, diffusion, convection...), mais on peut exploiter la conservation des $n \sin(\theta)$
- ▷ Laser confiné dans un filet d'eau (pas trop de calculs à effectuer derrière, on se contentera de l'effet "whaouh" que ça produit).
- ▷ Optimisation numérique ou recalage (module minimize de Scipy.optimize) avec visualisation de la fonction gain dans un espace à 2D (ax.plottrisurf sur Python).

10 Critique des choix pédagogiques de la leçon

- *Tribune libre où vous réalisez une justification des choix pédagogiques opérés dans la LP, ainsi que les choix d'expériences et simulations numériques utilisées. Ce genre d'exercice sera très formateur pour vous donner de l'aisance à l'oral et montrer au jury une réflexion personnelle et distanciée dans la construction de votre leçon. Cette justification vous sera demandée lors de la phase d'entretien avec le jury, après votre exposé de 40 minutes.*

On n'introduit pas les équations d'Euler-Lagrange dans cette leçon mais on les place dans les prérequis, pour bien démontrer aux élèves qu'on retrouve les équations de base de la mécanique.

On se focalise uniquement sur l'optique afin d'éviter les calculs trop longs qu'on peut retrouver dans les équations de la caténoïde, du brachistochrone ou de la chaînette.

On exploite l'équation des rayons lumineux avec l'expérience, ce qui est pédagogiquement intéressant et suit le principe bien connu de "je fais une mystérieuse expérience, je fais de la physique dans mon cours et hop je la résouds ensuite."

- POUR PRÉPARER CETTE LEÇON, ESSAYEZ DE SUIVRE UN PRINCIPE DE MINIMISATION DE L'ENNUI. -