

**TD1**

Chargé de TD : Poulain Rémy

**Exercice 1 (Problème de l'arrêt)**

Soit un modèle de calcul (un ensemble de machines  $\mathfrak{M}$ ) ayant les propriétés suivantes :

- Les machines opèrent de l'ensemble d'entrées  $E$  vers l'ensemble de sorties  $S$ .
- On peut encoder les machines : il existe une application *codage* de l'ensemble des machines  $\mathfrak{M}$  vers l'ensemble d'entrées  $E$ . (*codage*( $M$ ) sera noté  $[M]$ .)
- Il existe deux machines, *Vrai* et *Faux*, qui pour toute entrée retournent 1 et 0 respectivement.
- Il existe une machine  $\perp$ , qui ne s'arrête sur aucune entrée.
- Pour tous  $a, b \in E$ , la paire  $\langle a, b \rangle \in E$ . (On suppose notamment qu'il existe une machine  $D$  telle que  $D(x) = \langle x, x \rangle$ .)
- Pour toute machine  $Q \in \mathfrak{M}$  telle que  $\forall a \in E, Q(a) \in E$  et pour toute machine  $P \in \mathfrak{M}$  la machine  $(P \circ Q)$  telle que pour tout  $a \in E$  :

$$(P \circ Q)(a) = P(Q(a))$$

appartient à  $\mathfrak{M}$ .

- Soient  $P, Q, R$  des machines de  $\mathfrak{M}$ ,  $b \in S$ , alors la machine  $N$  telle que pour tout  $a \in E$  :

$$N(a) = \begin{cases} Q(a) & \text{si } P(a)=b \\ R(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à  $\mathfrak{M}$ .

Montrer qu'il n'existe pas de machine  $H$ , qui, étant donnée une machine  $X$ , est telle que :

$$H(\langle [X], a \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ ne s'arrête pas sur } a \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 2 (Machines de Turing)**

- 1) Construire une machine de Turing reconnaissant le langage des palindromes.
- 2) Construire une machine de Turing calculant  $n + 1$ , pour  $n$  donné en binaire. (bit de poids fort à gauche)
- 3) Donner explicitement la table d'une machine de Turing qui, étant donné un mot  $w \in \{0, 1\}^*$ , accepte  $w$  si  $w$  contient au moins autant de 0 que de 1 et rejette sinon. (On prendra soin de démontrer que la machine fait bien ce qu'elle est censée faire).

**Exercice 3 (Questions existentielles)**

Parmi les trois fonctions suivantes, deux sont calculables, et la problème de la calculabilité de la dernière fonction est un (célèbre) problème ouvert. Lesquelles ?

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si Dieu existe} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_2(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent la sous-séquence } 1^n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_3(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent} \\ & \text{une sous-séquence maximale de 1 de longueur } n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

**Exercice 4 (Ruban bi-infini)<sup>1</sup>**

On considère le modèle de calcul des machines de Turing à ruban bi-infini. On supprime le symbole spécial \$ et les contraintes associées, de sorte que les machines peuvent lire et écrire aussi loin que nécessaire vers la gauche. Une configuration initiale est un triplet  $(\varepsilon, q_0, w)$  et une configuration finale

---

1. Lire cet énoncé, en accepter la conclusion, passer à l'exercice suivant, y revenir une fois le reste de la feuille terminée.

un triplet  $(w, q, w')$  avec  $q \in \{\mathbf{accept}, \mathbf{reject}\}$ . La relation de transition est donnée comme dans le cours, en adaptant pour que la bande soit étendue par du blanc au fur et à mesure qu'on avance vers la gauche. La définition de fonction calculable est aussi adaptée naturellement, en ignorant les blancs terminaux à gauche comme à droite.

Montrer qu'une fonction est calculable dans ce modèle ssi elle est calculable par une machine de Turing.

### Exercice 5 (Castors affairés)

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble des machines de Turing à ruban bi-infini, sur l'alphabet  $\{1, B\}$ , à  $n$  états (sans compter **accept** et **reject**) et qui acceptent le mot vide.

Si  $M \in \mathcal{E}_n$ , on note  $f(M)$  le nombre de 1 inscrits sur le ruban quand, sur la donnée  $\varepsilon$ ,  $M$  s'arrête en acceptant. On considère la fonction SCORE de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par  $\text{SCORE}(n) = \max\{f(M) \mid M \in \mathcal{E}_n\}$ .

1. Calculer SCORE(2).
2. Montrer que SCORE n'est pas calculable.
3. Montrer que  $\text{SCORE}(3) \geq 6$ .<sup>2</sup>

### Exercice 6 (Deux états)

1. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing sur l'alphabet  $\{0, 1, B, \$\}$ .
2. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing à deux états (sans compter **accept** et **reject**).
3. Peut-on réaliser les deux simplifications à la fois?

---

2. En fait, on a égalité.