

TD2**Poulain Rémy****Exercice 1 (Palindromes sur 2 rubans)**

Montrer qu'il existe une machine de Turing sur 2 rubans qui reconnaît le langage des palindromes en temps linéaire.

Exercice 2 (Clôture des langages rékursifs)

1. Montrer que la classe des langages rékursifs est close par intersection, union et complémentaire.
2. Montrer que la classe des langages rékursivement énumérables est close par intersection et union.

Exercice 3 (Fonctions calculables et langages rékursivement énumérables)

Soit f une fonction calculable. Montrer que l'image de f est un langage rékursivement énumérable.

Exercice 4 (Caractérisation des langages rékursivement énumérables)

Montrer que L est un langage rékursivement énumérable si et seulement si il existe une machine de Turing M à k rubans et un état distingué q_e tels que :

$$q_0, (\epsilon, \$), \dots, (\epsilon, \$) \vdash_M^* q_e, (\epsilon, \$w'_0), \dots, (\epsilon, \$w'_{k-2}), (\epsilon, \$w) \text{ ssi } w \in L$$

Exercice 5 (Image de langages rékursivement énumérables)

Montrer que, si f est calculable et L est rékursivement énumérable, alors $f(L)$ est rékursivement énumérable.

Retour sur la semaine dernière**Exercice 6 (Ruban bi-infini)**

On considère le modèle de calcul des machines de Turing à ruban bi-infini. On supprime le symbole spécial $\$$ et les contraintes associées, de sorte que

les machines peuvent lire et écrire aussi loin que nécessaire vers la gauche. Une configuration initiale est un triplet (ε, q_0, w) et une configuration finale un triplet (w, q, w') avec $q \in \{\mathbf{accept}, \mathbf{reject}\}$. La relation de transition est donnée comme dans le cours, en adaptant pour que la bande soit étendue par du blanc au fur et à mesure qu'on avance vers la gauche. La définition de fonction calculable est aussi adaptée naturellement, en ignorant les blancs terminaux à gauche comme à droite.

Montrer qu'une fonction est calculable dans ce modèle ssi elle est calculable par une machine de Turing.

Exercice 7 (Castors affairés)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{E}_n l'ensemble des machines de Turing à ruban bi-infini, sur l'alphabet $\{1, B\}$, à n états (sans compter **accept** et **reject**) et qui acceptent le mot vide.

Si $M \in \mathcal{E}_n$, on note $f(M)$ le nombre de 1 inscrits sur le ruban quand, sur la donnée ε , M s'arrête en acceptant. On considère la fonction SCORE de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $\text{SCORE}(n) = \max\{f(M) \mid M \in \mathcal{E}_n\}$.

1. Calculer SCORE(2).
2. Montrer que SCORE n'est pas calculable.
3. Montrer que $\text{SCORE}(3) \geq 6$.¹

Exercice 8 (Deux états)

1. Montrer que toute fonction calculable sur l'alphabet Σ est calculable par une machine de Turing sur l'alphabet $\{0, 1, B, \$\}$. On utilisera une bande supplémentaire en lecture seule qui contiendra initialement l'entrée.
2. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing à deux états (sans compter **accept** et **reject**).

1. En fait, on a égalité.