

Exercice 1.

1. Le coefficient multiplicateur d'une hausse de 60 % est égal à 1,6. Le coefficient multiplicateur de la diminution inverse est égal à $\frac{1}{1,6} \approx 0,625$. Il correspond à une baisse de $(1 - 0,625) \times 100 = 37,5$ %. **Réponse d.**

2. On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Comme A et B sont indépendants,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

D'où $p(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$. **Réponse a.**

3. La primitive F est de la forme $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + c$ où c est une constante. On calcule cette constante en utilisant le fait que $F(1) = 0$.

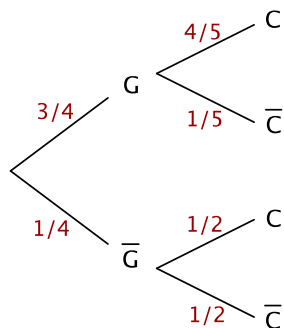
$$\begin{aligned} F(1) &= 0 \\ \frac{1}{3} + 1 + c &= 0 \\ \frac{4}{3} + c &= 0 \\ c &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

D'où $c = -\frac{4}{3}$ puis $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{4}{3}$.

On en déduit $F(0) = c = -\frac{4}{3}$. **Réponse b.**

Exercice 2.

1. L'arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé est le suivant :



2. (a) D'après l'arbre, $p(G \cap C) = p(G) \times p_G(C) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$. La probabilité que le groupe interprète la chanson sans erreur est donc égale à $\frac{3}{5}$.

(b) Si un et un seul des membres du groupe se trompe, c'est soit le guitariste (auquel cas la chanteuse ne se trompe pas, événement $\overline{G} \cap C$), soit la chanteuse (auquel cas le guitariste ne s'est pas trompé, événement $G \cap \overline{C}$). Or,

$$p((\overline{G} \cap C) \cup (G \cap \overline{C})) = p(\overline{G} \cap C) + p(G \cap \overline{C})$$

$$\text{et } p(\overline{G} \cap C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \text{ et } p(G \cap \overline{C}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}. \text{ D'où}$$

$$p((\overline{G} \cap C) \cup (G \cap \overline{C})) = \frac{1}{8} + \frac{3}{20} = \frac{5}{40} + \frac{6}{40} = \frac{11}{40}$$

La probabilité qu'un seul des membres du groupe commette une erreur est donc égale à $\frac{11}{40}$, soit un peu plus d'un quart.

(c) La chanteuse interprète sans erreur le morceau est l'événement C . On retrouve C dans les événements $G \cap C$ et $\overline{G} \cap C$. D'où

$$p(C) = p(G \cap C) + p(\overline{G} \cap C) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} + \frac{1}{8} = \frac{24}{40} + \frac{5}{40} = \frac{29}{40}$$

Au final, la probabilité que la chanteuse ne se trompe pas est égale à $\frac{29}{40}$, soit un peu moins que les trois quarts.

3. Par définition,

$$p_C(G) = \frac{p(C \cap G)}{p(C)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{29}{40}} = \frac{3}{5} \times \frac{40}{29} = \frac{3}{1} \times \frac{8}{29} = \frac{24}{29}$$

En arrondissant à 10^{-3} près, on a donc $p_C(G) \approx 0,828$. C'est la probabilité que le guitariste ait joué juste, sachant que la chanteuse ne s'est pas trompée.

4. Remarque : on retrouve le résultat de la question 2.(b), dans laquelle on avait démontré que la probabilité qu'aucun des membres du groupe ne commette d'erreur était $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire bien 0,6.

On passe par l'événement contraire. L'événement « jouer parfaitement à au moins un des trois concours » a pour événement contraire « se tromper à chacun des trois concours ». La probabilité que le groupe se trompe est égale à $1 - 0,6 = 0,4$. La probabilité que le groupe se trompe à chacun des trois concours est donc, sachant que les trois concours sont indépendants : $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,4^3 = 0,064$. La probabilité de jouer parfaitement à au moins un des trois concours est alors égale à $1 - 0,4^3 = 0,936$.

Exercice 3.

1. Une primitive de $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ sur $I = \mathbb{R}$ est :

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x$$

2. Une primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ sur $I =]0; +\infty[$ est :

$$F(x) = -\frac{1}{x} + x^2$$

3. Une primitive de $f(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$ sur $I =]0; +\infty[$ est :

$$F(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Exercice 4.

Le coût marginal C_m est la dérivée du coût total C , donc le coût total C est une primitive du coût marginal C_m .

La fonction de coût total est donc de la forme : $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{10}{2}q^2 - \frac{1}{q} + 30q + c$,

soit $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 - \frac{1}{q} + 30q + c$, où c est une constante réelle.

On sait également que $C(1) = 10$ puisque le coût est exprimé en milliers d'euros, ce qui permet de calculer la constante c :

$$\begin{aligned} C(1) &= 10 \\ \frac{1}{3} \times 1^3 - 5 \times 1^2 - \frac{1}{1} + 30 \times 1 + c &= 10 \\ \frac{1}{3} - 5 - 1 + 30 + c &= 10 \\ 24 + \frac{1}{3} + c &= 10 \\ c &= 10 - 24 - \frac{1}{3} \\ c &= -\frac{43}{3} \end{aligned}$$

L'expression du coût total est donc :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 - \frac{1}{q} + 30q - \frac{43}{3} \quad \text{pour } q \in [1; 10].$$

Exercice 5.

Pour montrer que G est une primitive de f sur I , il faut montrer que la dérivée de G est égale à f , c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $G'(x) = f(x)$. On calcule donc la dérivée de G . Pour cela, on utilise la règle du quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} u(x) = 2x - 4 & u'(x) = 2 \\ v(x) = 3 - x & v'(x) = -1 \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{2(3-x) - (2x-4) \times (-1)}{(3-x)^2} \\ G'(x) &= \frac{6 - 2x + 2x - 4}{(3-x)^2} \\ G'(x) &= \frac{2}{(3-x)^2} \\ G'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

On a bien $G'(x) = f(x)$, donc G est une primitive de f sur $] -\infty; 3[$.

Cherchons maintenant la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

On sait que $F(x) = G(x) + c = \frac{2}{(3-x)^2} + c$ car toutes les primitives de f ne diffèrent que d'une constante. On résout :

$$\begin{aligned} F(1) &= 0 \\ \frac{2-4}{3-1} + c &= 0 \\ \frac{-2}{2} + c &= 0 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

La primitive cherchée a donc pour expression $F(x) = \frac{2}{(3-x)^2} + 1$.

Exercice 6.

f est la fonction définie sur $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par : $f(x) = \frac{4x^2 - 12x + 1}{(4x^2 - 1)^2}$.

1. f_1 est du type $\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ avec $u(x) = 2x + 1$. Il faut faire apparaître $u'(x)$ dans l'expression de f_1 . Or, $u'(x) = 2$. On réécrit f_1 :

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Or, une primitive de la fonction $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$. D'où, une primitive de f_1 est la fonction

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2x+1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x+1}$$

On raisonne suivant le même principe pour f_2 : $f_2(x) = \frac{1}{u(x)^2}$ avec $u(x) = 2x - 1$.

Il faut faire apparaître $u'(x) = 2$. On réécrit :

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

D'où une primitive de f_2 est la fonction F_2 définie par :

$$F_2(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x-1}$$

2. On part de l'expression du membre de droite, et on va mettre au même dénominateur pour retrouver l'expression de f .

$$\begin{aligned} \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x-1)^2} &= \frac{2(2x-1)^2 - (2x+1)^2}{(2x+1)^2(2x-1)^2} \\ &= \frac{2(4x^2 - 4x + 1) - (4x^2 + 4x + 1)}{[(2x+1)(2x-1)]^2} \\ &= \frac{2(4x^2 - 4x + 1) - (4x^2 + 4x + 1)}{(4x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 8x + 2 - 4x^2 - 4x - 1}{(4x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 12x + 1}{(4x^2 - 1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc démontré que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x-1)^2}$$

3. D'après la question précédente, on a $f(x) = 2f_1(x) - f_2(x)$. D'après les propriétés de linéarité des primitives, une primitive F de f sur I est alors donnée par

$$F(x) = 2F_1(x) - F_2(x)$$

où F_1 et F_2 sont les primitives de f_1 et f_2 respectivement, calculées à la question 1. D'où :

$$F(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2x+1} - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2x-1}$$

Donc

$$F(x) = -\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{2x-1}$$