

Exercice 1.

1. La probabilité que la personne interrogée soit une femme, sachant que c'est un cadre est égale à

$$\frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre de cadres au total}}$$

On sait qu'il y a 8 femmes cadres, mais le tableau ne donne pas le nombre de cadres au total. Cependant, il y a 60 personnes dans la population, dont $25 + 15 = 40$ employés. Il y a donc $60 - 40 = 20$ cadres. Finalement, la probabilité que la personne interrogée soit une femme, sachant que c'est un cadre, est égale à $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Réponse b.

2. On calcule les trois probabilités proposées. On doit trouver le même résultat que l'énoncé dans un seul des trois cas.

- (a) Par indépendance de C et D , on a

$$p(D \cap C) = p(D) \times p(C) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

qui n'est pas le résultat proposé.

- (b) On applique la formule pour calculer $p(C \cup D)$, et on réutilise la question précédente pour $p(C \cap D)$:

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{7}{18}$$

Cela correspond au résultat proposé. Pour être certain, on calcule tout de même la probabilité énoncée en c.

- (c) On applique la définition et on réutilise encore $p(C \cap D)$:

$$p_D(C) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{36} \times \frac{12}{1} = \frac{1}{3}$$

La réponse proposée est fautive.

Conclusion : seule la **réponse b** est correcte.

3. On passe par l'événement contraire. Le contraire de « obtenir au moins une fois pile » est « n'obtenir aucun pile », autrement dit « obtenir quatre fois face ». La pièce étant équilibrée, $p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$. Les quatre lancers successifs sont indépendants, donc

$$p(\text{obtenir 4 face}) = p(F) \times p(F) \times p(F) \times p(F) = (p(F))^4$$

La probabilité d'obtenir quatre fois face est donc égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

On en déduit que

$$p(\text{obtenir au moins 1 pile}) = 1 - p(\text{obtenir 4 face}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Réponse b.

4. On calcule les trois probabilités données. Avant cela, on complète l'arbre avec les probabilités manquantes en utilisant $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$.

- (a) Pour calculer $p(B)$, on utilise la formule des probabilités totales.

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

$$p(B) = 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,1 = 0,14 + 0,08 = 0,22$$

La réponse proposée est vraie. On vérifie néanmoins que les deux suivantes sont fausses.

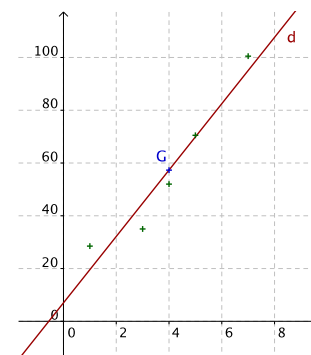
- (b) $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$. La réponse proposée est fautive.

- (c) Par définition, et en réutilisant la première question pour $p(B)$:

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,2 \times 0,7}{0,22} \approx 0,64$$

La réponse proposée est fautive.

Conclusion : seule la **réponse a** est correcte.

Exercice 2.

1. Figure :

2. Le point moyen G a pour coordonnées $(x_G; y_G)$ avec

$$x_G = \bar{x} = \frac{1 + 3 + 4 + 5 + 7}{5} = 4$$

et

$$y_G = \bar{y} = \frac{28,5 + 35 + 52 + 70,5 + 100,5}{5} = 57,3$$

Donc $G(4; 57,3)$.

3. (a) A l'aide de la calculatrice, on trouve $a \approx 12,58$ et $b = 7$, donc la droite des moindres carrés a pour équation $y = 12,58x + 7$.
- (b) C'est une des propriétés de la droite des moindres carrés : elle passe par le point moyen G du nuage.
- (c) En se fiant à l'ajustement affine, on peut déterminer une estimation de la consommation pour l'année 2005. 2005 est l'année de rang 8 par rapport à 1998. En remplaçant x par 8 dans l'équation de d , on trouve : $y_d = 12,58 \times 8 + 7 = 107,64$, ce qui correspond à une consommation de 107 640 euros.
4. L'écart en pourcentage entre la valeur estimée y_d et la valeur réelle y_8 se mesure par rapport à la valeur réelle y_8 . Il est donné par :

$$\frac{y_d - y_8}{y_8} \times 100 = \frac{107,64 - 140}{140} \times 100 \approx 23$$

en arrondissant à l'entier le plus proche, c'est-à-dire un écart de 23 % par rapport à la valeur réelle.

C'est un écart important : l'ajustement affine semble peu adapté dans ce cas. Il vaudrait mieux faire un ajustement par un autre type de fonction.

Exercice 3.

1. On calcule les fréquences. On a

$$f_1 = \frac{\text{nombre d'accidents ayant lieu le lundi}}{175} = \frac{36}{175} \approx 0,206$$

De même,

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{20}{175} \approx 0,114 & f_4 &= \frac{22}{175} \approx 0,126 & f_6 &= \frac{26}{175} \approx 0,149 \\ f_3 &= \frac{17}{175} \approx 0,097 & f_5 &= \frac{21}{175} \approx 0,120 & f_7 &= \frac{33}{175} \approx 0,189 \end{aligned}$$

2. Si tous les jours de la semaine présentent le même risque en terme d'accident, alors la probabilité qu'un accident ait lieu un jour donné est égale à $p = \frac{1}{7}$.
3. On calcule :

$$\begin{aligned} d_{\text{obs}}^2 &= \left[\left(0,206 - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(0,114 - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(0,097 - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(0,126 - \frac{1}{7}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(0,120 - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(0,149 - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(0,189 - \frac{1}{7}\right)^2 \right] \\ &\approx 0,0099 \end{aligned}$$

On calcule ensuite $200 d_{\text{obs}}^2 = 1,979$.

4. Sur le diagramme en boîte, on lit le neuvième décile de la série : $D_9 \approx 1,3$. On compare ce neuvième décile à la valeur de $200 d_{\text{obs}}^2$. On a $200 d_{\text{obs}}^2 > D_9$, donc au risque de 10 %, l'hypothèse d'équiprobabilité doit être rejetée.

Exercice 4.

1. D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} p(A) &= 0,4 & p(T) &= 0,35 & p(V) &= 0,4 \\ p_A(V) &= 0,6 & p_T(V) &= 0,2 \end{aligned}$$

2. (a) Probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles : c'est $p(V \cap A) = p(A) \times p_A(V) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
- (b) Probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques : c'est $p(V \cap T) = p(T) \times p_T(V) = 0,35 \times 0,2 = 0,07$.
- (c) Probabilité que le client voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques : les raisons « autres que professionnelles ou touristiques » correspondent à l'événement D . Il faut donc calculer $p(V \cap D)$. Or $p(V) = p(V \cap A) + p(V \cap T) + p(V \cap D)$ et on connaît les trois premiers termes. Donc

$$p(V \cap D) = p(V) - p(V \cap A) - p(V \cap T) = 0,4 - 0,24 - 0,07 = 0,09$$

3. Déterminer la probabilité que le client voyage pour des raisons autres que professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe : on cherche $p_V(\bar{A})$. Par définition, on a

$$p_V(\bar{A}) = \frac{p(V \cap \bar{A})}{p(V)}$$

Il faut déterminer $p(V \cap \bar{A})$. Or, on a

$$p(V \cap \bar{A}) = p(V) - p(V \cap A) = 0,4 - 0,24 = 0,16$$

D'où

$$p_V(\bar{A}) = \frac{0,16}{0,4} = 0,4$$

4. (a) On note E l'événement « au moins un des n voyageurs voyage en seconde classe ». L'événement contraire \bar{E} correspond à « les n voyageurs voyagent tous en première classe ». Comme ces événements sont indépendants, on a

$$p(\bar{E}) = (p(V))^n = (0,4)^n$$

D'où $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - (0,4)^n$.

- (b) On trouve que le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,995$ est $n = 6$.