

Exercice 1.

a) D'après la règle sur les polynômes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 + 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

b) On a $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 3x + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x + 1 = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = -\infty$.

Et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x + 1 = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = +\infty$.

On en conclut que la courbe associée admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

NB : Ici, on ne peut pas appliquer la règle sur les termes de plus haut degré d'une fraction rationnelle, car on étudie la limite en -1 et non pas en $+\infty$ ou $-\infty$.

c) D'après la règle sur les fractions rationnelles, la limite en $-\infty$ du quotient est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2} = 2$$

NB : Avant de calculer la limite en $-\infty$ du quotient $\frac{4x^2}{2x^2}$, il faut simplifier ce quotient !

On en conclut que la courbe associée admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

d) Même méthode qu'au c) en n'oubliant pas non plus l'étape de simplification :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{x^3 - 6x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

On en conclut que la courbe associée admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

Exercice 2.

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0$. Ainsi, f est encadrée par deux fonctions tendant vers 0 en $+\infty$. D'après les théorèmes d'encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 9 = 9$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} 9 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 9$.

(b) On utilise les règles sur le calcul de la limite d'une fonction composée. On vient de voir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 9 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 9$. Or, $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3$. D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 3.$$

Exercice 3.

a) h_1 est définie sur $]0; +\infty[$, dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour } x > 0, h_1'(x) = -5x^4 + \frac{4}{2\sqrt{x}} = -5x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

b) h_2 est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$h_2(x) = \frac{5}{3}x^2 - x, \text{ d'où pour } x \in \mathbb{R}, h_2'(x) = \frac{5}{3} \times 2x - 1 = \frac{10}{3}x - 1.$$

Autre méthode : $h_2(x) = \frac{5x^2 - 3}{3}$ de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x^2 - 3$ et $v(x) = 3$, de dérivées $u'(x) = 10x - 3$ et $v'(x) = 0$.

On sait que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, d'où

$$h_2'(x) = \frac{(10x - 3) \times 3 - (5x^2 - 3) \times 0}{3^2} = \frac{(10x - 3) \times 3}{9} = \frac{10x - 3}{3} = \frac{10}{3}x - 1.$$

c) h_3 est définie (et dérivable) dès que $x^2 + 2x + 5 \neq 0$. Il faut donc chercher les racines du trinôme du second degré $x^2 + 2x + 5$. Or, le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 4 - 4 \times 5 = -16 < 0$. Donc le trinôme n'a pas de racine réelle, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 5 > 0$. Ainsi, la fonction h_3 est définie sur \mathbb{R} , et sa dérivée également.

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \in \mathbb{R}, h_3'(x) &= \frac{2(x^2 + 2x + 5) - (2x - 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 10 - 4x^2 - 4x + 2x + 2}{(x^2 + 2x + 5)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2x + 12}{(x^2 + 2x + 5)^2} \end{aligned}$$

NB : Ne surtout pas oublier les parenthèses !

d) h_4 est définie pour $x \neq 0$ (à cause de $\frac{1}{x^2}$) et $x \geq 0$ (à cause de \sqrt{x}), donc finalement définie pour $x > 0$. Sur $]0; +\infty[$, h_4 est dérivable. De plus, $h_4(x)$ s'écrit h_4 est de la forme uv , avec $u(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = 1 - \sqrt{x}$, de dérivées respectives

$$u'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{et} \quad v'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La dérivée d'un produit est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Pour } x > 0, h_4'(x) &= -\frac{2}{x^3} (1 - \sqrt{x}) + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{2}{x^3} (1 - \sqrt{x}) - \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. a) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est donnée par

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

Or, $f(2) = -4 + 6 + 1 = 3$. On calcule ensuite la dérivée de f . Pour $x > 0$, $f'(x) = -2x + 3$. D'où $f'(2) = -4 + 3 = -1$. L'équation de la tangente \mathcal{T} est donc

$$y = -1(x - 2) + 3$$

$$y = -x + 2 + 3$$

$$y = -x + 5$$

- b) L'abscisse du point B est 2. On vérifie que le point B appartient bien à la courbe de g , car $g(2) = 3$ et 3 est bien l'ordonnée du point B .

On calcule ensuite la dérivée de g . On a, pour $x > 0$, $g'(x) = -\frac{4}{x^2}$. On en déduit $g'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$. L'équation de la tangente \mathcal{T}' à \mathcal{C}_g en B est donc $y = -1(x - 2) + 3$, c'est-à-dire $y = -x + 5$.

- c) On remarque que les tangentes \mathcal{T} et \mathcal{T}' ont la même équation : elles sont donc confondues.

2. a) On calcule la différence

$$f(x) - (-x + 5) = -x^2 + 3x + 1 - (-x + 5) = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4)$$

donc

$$f(x) - (-x + 5) = -(x - 2)^2$$

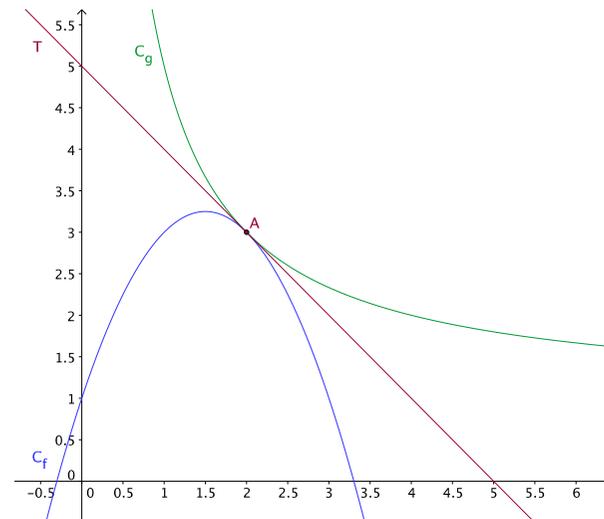
en remarquant une identité remarquable (si on ne la voit pas, on calcule les racines de ce trinôme du second degré à partir du discriminant). Cette différence est donc toujours négative. Donc \mathcal{C}_f est toujours en-dessous de \mathcal{T} .

- b) On calcule ensuite

$$g(x) - (-x + 5) = \frac{4}{x} + x - 4 = \frac{1}{x} (4 + x^2 - 4x) = \frac{1}{x} (x - 2)^2$$

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, cette différence est du signe de x , donc positive. Donc \mathcal{C}_g est au-dessus de sa tangente \mathcal{T}' sur $]0; +\infty[$.

3. Tracé : voir ci-contre.



x	$-\infty$	0	4	10	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
h	$+\infty$	1	33	-399	$-\infty$

2. h est continue sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynomiale. De plus, d'après le tableau de variations, h est strictement décroissante sur $] - \infty; 0]$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $h(0) = 1$. Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, h prend une fois et une seule toute valeur comprise entre 1 et $+\infty$. Donc, h ne s'annule pas sur $] - \infty; 0]$. De même, h est strictement croissante sur $[0; 4]$, $h(0) = 1$ et $h(4) = 33$, et $0 \notin [1; 33]$. Donc pour les mêmes raisons, h ne s'annule pas sur $[0; 4]$.

NB : Le minimum de h sur l'intervalle $] - \infty; 4]$ est atteint en 0 et vaut 1, donc h ne s'annule pas sur cet intervalle.

3. h est continue, strictement décroissante sur $[4; 10]$, et $h(4) = 33 > 0$, $h(10) = -399 < 0$. Comme 0 est compris entre -399 et 33 , le théorème de la valeur intermédiaire assure qu'il existe un unique $\alpha \in [4; 10]$ tel que $h(\alpha) = 0$.
4. A l'aide de la calculatrice, on obtient

$$f(6,02) \approx 0,275 > 0 \quad \text{et} \quad f(6,03) \approx -0,091 < 0.$$

Ainsi, 0 est compris entre $f(6,03)$ et $f(6,02)$, donc α est compris entre 6,02 et 6,03, c'est-à-dire

$$6,02 \leq \alpha \leq 6,03$$

Exercice 5.

1. On calcule les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ en utilisant la règle des polynômes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 6x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty,$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 6x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty.$$

De plus, $h(0) = 1$, $h(4) = 33$ et $h(10) = -399$. On complète le tableau :