

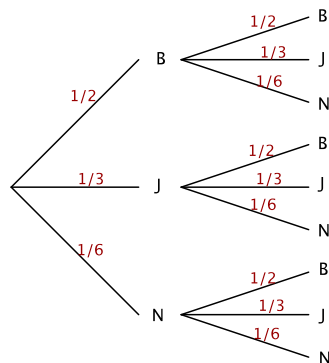
## Exercice 1.

1. (a) A chacun des deux tirages, il y a six boules dans l'urne. On est dans une situation d'équiprobabilité, donc la probabilité de tirer une boule bleue est

$$p(B) = \frac{\text{nombre de boules bleues}}{\text{nombre total de boules}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

De la même manière,  $p(J) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  
et  $p(N) = \frac{1}{6}$ .

On utilise l'arbre suivant :



- (b) Les tirages sont indépendants, puisqu'ils sont faits avec remise. Donc

$$p(B_2) = p(B) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p(J_2) = p(J) \times p(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p(N_2) = p(N) \times p(N) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

L'événement  $C$  « deux boules de la même couleur » correspond à  $B_2 \cup J_2 \cup N_2$  (deux boules bleues, ou deux boules jaunes, ou deux boules noires). Ces trois événements étant deux à deux incompatibles, on a

$$p(C) = p(B_2) + p(J_2) + p(N_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

Donc  $p(C) = \frac{7}{18}$ .

L'événement  $D$  « deux boules de couleurs différentes » est l'événement contraire de l'événement  $C$  :  $D = \bar{C}$ . On a donc  $p(D) = 1 - p(C) = 1 - \frac{7}{18} =$

$\frac{11}{18}$ . Donc  $p(D) = \frac{11}{18}$ .

2. On reprend la même expérience mais sans remise. Cette fois, les deux tirages ne sont plus indépendants. Au premier tirage, les probabilités de tirer une boule bleue, jaune ou noire sont les mêmes qu'au 1. En revanche, au deuxième tirage, il ne reste que 5 boules dans l'urne.

- Si on a tiré une boule bleue en premier, il reste 2 boules bleues, 2 boules jaunes et 1 boule noire, et on a

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad p_{B_1}(J_2) = \frac{2}{5}, \quad p_{B_1}(N_2) = \frac{1}{5}.$$

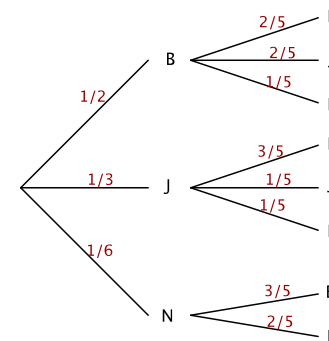
- Si on a tiré une boule jaune en premier, il reste 3 boules bleues, 1 boule jaune et 1 boule noire, et on a

$$p_{J_1}(B_2) = \frac{3}{5}, \quad p_{J_1}(J_2) = \frac{1}{5}, \quad p_{J_1}(N_2) = \frac{1}{5}.$$

- Si on a tiré une boule noire en premier, il reste 3 boules bleues et 2 boules jaunes, et on a

$$p_{N_1}(B_2) = \frac{3}{5}, \quad p_{N_1}(J_2) = \frac{2}{5}, \quad p_{N_1}(N_2) = 0.$$

- (a) On représente tous les cas de figures par l'arbre pondéré ci-contre :



- (b) D'après l'arbre pondéré :

$$p(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$p(J_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$p(N_2) = \frac{1}{6} \times 0 = 0$$

$$p(C) = p(B_2) + p(J_2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

$$p(D) = 1 - p(C) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

## Exercice 2.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer un tirage de deux boules sans remise.

Lors du premier tirage, les dix boules sont équiprobables, donc :

- la probabilité de tirer une boule bleue est  $p(B_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ,
- la probabilité de tirer une boule noire est  $p(N_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ,
- la probabilité de tirer une boule rouge est  $p(R_1) = \frac{3}{10}$ .

Lors du deuxième tirage, il ne reste que 9 boules dans l'urne.

- Si on a tiré une boule bleue en premier, il reste 1 boule bleue, 5 boules noires et 3 boules rouges, et on a

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{1}{9}, \quad p_{B_1}(N_2) = \frac{5}{9}, \quad p_{B_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

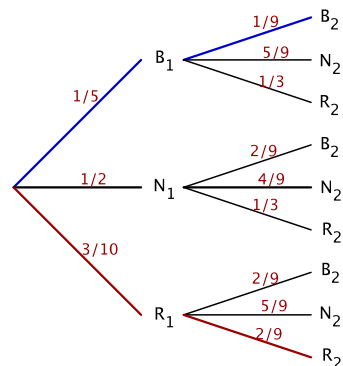
- Si on a tiré une boule noire en premier, il reste 2 boules bleues, 4 boules noires et 3 boules rouges, et on a

$$p_{N_1}(B_2) = \frac{2}{9}, \quad p_{N_1}(N_2) = \frac{4}{9}, \quad p_{N_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

- Si on a tiré une boule rouge en premier, il reste 2 boules bleues, 5 boules noires et 2 boules rouges, et on a

$$p_{R_1}(B_2) = \frac{2}{9}, \quad p_{R_1}(N_2) = \frac{5}{9}, \quad p_{R_1}(R_2) = \frac{2}{9}.$$

Cela peut être récapitulé par l'arbre pondéré ci-contre :



$B_2$  peut être réalisé en suivant trois chemins différents : le chemin bleu «  $B_1 \cap B_2$  », le chemin noir «  $N_1 \cap B_2$  », le chemin rouge «  $R_1 \cap B_2$  ». Ces événements sont deux à deux incompatibles. En effet, la première boule tirée ne peut pas être à la fois noire, ni bleue, ni rouge. On a donc

$$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap B_2)$$

On utilise alors la formule des probabilités composées pour exprimer  $p(B_1 \cap B_2)$  :

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2)$$

et de même pour les deux autres termes. D'où

$$p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2) + p(R_1) \times p_{R_1}(B_2)$$

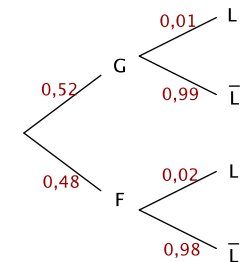
On remplace avec les probabilités calculées en préambule :

$$\begin{aligned} p(B_2) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{45} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Donc  $p(B_2) = \frac{1}{5}$ .

## Exercice 3.

1. D'après l'énoncé, on sait que  $p(G) = 0,52$ ,  $p_F(L) = 0,02$ , et  $p_G(L) = 0,01$ .  
On complète alors l'arbre :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(L) = p(G \cap L) + p(F \cap L) = p(G) \times p_G(L) + p(F) \times p_F(L)$$

donc

$$p(L) = 0,52 \times 0,01 + 0,48 \times 0,02 = 0,0148$$

Donc  $p(L) = 0,0148$ .

3. La probabilité demandée est  $p_L(F)$  (la probabilité que le bébé soit une fille, sachant qu'il a une luxation de la hanche). On sait que, d'après la définition de la probabilité conditionnelle :

$$p_L(F) = \frac{p(F \cap L)}{p(L)}$$

Or  $p(L) = 0,0148$  d'après le calcul précédent, et d'après l'arbre,  $p(F \cap L) = p(F) \times p_F(L) = 0,48 \times 0,02 = 0,0096$ . On remplace :

$$p_L(F) = \frac{0,0096}{0,0148} \approx 0,65$$

La probabilité qu'un bébé soit une fille, sachant qu'il a une luxation congénitale de la hanche, est de 0,65.  $p_L(F) = 0,65$ .

Soit une probabilité  $p(A) \approx 0,43$ .

#### Exercice 4.

Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent trois feux tricolores de circulation. Ces feux fonctionnent de façon indépendante. Le cycle de chacun d'eux est réglé de la façon suivante :

Vert : 35 secondes ; Orange : 5 secondes ; Rouge : 20 secondes

- On note : –  $V$  l'événement « le feu est vert » ;  
 –  $O$  l'événement « le feu est orange » ;  
 –  $R$  l'événement « le feu est rouge ».

1. Le cycle de fonctionnement du feu est de 35 secondes + 5 secondes + 20 secondes = 60 secondes. La probabilité qu'un feu soit vert est alors :

$$p(V) = \frac{\text{temps pendant lequel le feu est vert pendant un cycle}}{\text{durée d'un cycle du feu}} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}.$$

De la même manière,

$$p(O) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad p(R) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Donc  $p(V) = \frac{7}{12}$ ,  $p(O) = \frac{1}{12}$  et  $p(R) = \frac{1}{3}$ .

2. Les trois feux sont indépendants. L'événement  $A$  « exactement deux feux verts » correspond à six configurations possibles, selon que le feu qui n'est pas vert est en première, deuxième ou troisième position, et celui que ce feu est orange ou rouge :

$VVO$ ,  $VVR$ ,  $VOV$ ,  $VRV$ ,  $OVV$ ,  $RVV$ .

D'où

$$p(A) = p(VVO) + p(VVR) + p(VOV) + p(VRV) + p(OVV) + p(RVV).$$

Or, les feux successifs étant indépendants, on a :

$$p(VVO) = p(V) \times p(V) \times p(O) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{1}{12}$$

etc. (principe multiplicatif). D'où :

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{1}{12} + \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{7}{12} \\ &\quad + \frac{7}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{49}{1728} + \frac{49}{432} + \frac{49}{1728} + \frac{49}{432} + \frac{49}{1728} + \frac{49}{432} \\ &= \frac{245}{576} \end{aligned}$$