

Exercice 1.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$,

donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 5 + \frac{1}{x^3} = +\infty$.

Pas de résultat d'asymptote.

(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3x - 5 = -5$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 5 + \frac{1}{x^3} = -\infty$.

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$, donc par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 7x + 1 - 2x^2 = -\infty.$$

Pas de résultat d'asymptote.

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x^2} = 0$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x^2} + 2 = 2$.

La courbe associée admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $-\infty$.

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 9 = +\infty$ donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 9} = 0$. Par différence, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{4}{x - 9} = 4.$$

La courbe associée admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ au voisinage de $+\infty$.

(f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 9 \\ x > 9}} x - 9 = 0^+$ donc par inverse, $\lim_{\substack{x \rightarrow 9 \\ x > 9}} \frac{1}{x - 9} = +\infty$.

Donc par produit avec -4 , $\lim_{\substack{x \rightarrow 9 \\ x > 9}} -\frac{4}{x - 9} = -\infty$.

Donc par somme avec 3 , $\lim_{\substack{x \rightarrow 9 \\ x > 9}} 3 - \frac{4}{x - 9} = -\infty$.

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation $x = 9$.

(g)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + x + 1 = -\infty$$

Donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^3 - 2x^2 + x + 1} = 0$.

La courbe associée admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

(h) On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3x + 5 = 5$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{7}{x} = -\infty$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

Donc par somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3x + 5 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} = -\infty$.

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Exercice 2.

- (a) Pas de résultat d'asymptote.
- (b) La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ au voisinage de $+\infty$.
- (c) La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
- (d) La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 3x + 2$ au voisinage de $+\infty$.
- (e) Pas de résultat d'asymptote.
- (f) La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Exercice 3.

1. La fonction f est définie lorsque $x^2 - 2x + 5 \neq 0$. Pour déterminer les valeurs interdites de f , on résout l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ (à l'aide du discriminant).

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$

ce qui signifie que l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ n'a pas de solution. Donc f n'a pas de valeur interdite.

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

2. On calcule la limite en $+\infty$ du numérateur et du dénominateur.

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 3x - 1 = +\infty$ par somme.

Le dénominateur est à première vue une forme indéterminée. On détermine sa limite en factorisant la partie en x .

On peut écrire que $x^2 - 2x + 5 = x(x - 2) + 5$, et on a

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 2) = +\infty$$

donc par addition de 5, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 5 = +\infty$.

On obtient alors une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

(Si vous n'êtes pas convaincus, écrivez que

$$\frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 5} = (2x^2 + 3x - 1) \times \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$$

Par inverse, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} = 0$. On est donc en présence d'une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.)

3. On met en facteur $2x^2$ dans le numérateur :

$$2x^2 + 3x - 1 = 2x^2 \left(1 + \frac{3x}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} \right) = 2x^2 \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2} \right)$$

4. De la même manière, on met en facteur x^2 au dénominateur :

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 \left(1 - \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)$$

5. On obtient une nouvelle expression pour $f(x)$ (pour x non nul) :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 5} = \frac{2x^2 \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}$$

On peut simplifier numérateur et dénominateur par x :

$$f(x) = \frac{1 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2} \right) \times \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Sous cette forme, étudions à présent la limite de f en $+\infty$. On étudie la limite du numérateur, puis celle du dénominateur.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2} \right) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = 1$$

Donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 1$

Finalement, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$.

Exercice 4.

1. On calcule en mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} -x + 1 - \frac{1}{2x - 3} &= \frac{(-x + 1)(2x - 3) - 1}{2x - 3} \\ &= \frac{-2x^2 + 3x + 2x - 3 - 1}{2x - 3} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x - 4}{2x - 3} = f(x) \end{aligned}$$

Donc $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2x - 3}$.

2. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$. Il faut donc déterminer les limites de f en $-\infty$, $\frac{3}{2}$ à gauche, $\frac{3}{2}$ à droite, et $+\infty$.

• Etude en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 3 = -\infty$, donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0$.
D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty$.

Donc par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$.

• Etude en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$, donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0$.
 D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty$.

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

• Etude en $\frac{3}{2}$

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} -x + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x < 3/2}} 2x - 3 = 0^-$, donc par inverse, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x < 3/2}} \frac{1}{2x - 3} = -\infty$,

puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x < 3/2}} -\frac{1}{2x - 3} = +\infty$.

Par somme, on obtient alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x < 3/2}} f(x) = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x > 3/2}} 2x - 3 = 0^+$, donc par inverse, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x > 3/2}} \frac{1}{2x - 3} = +\infty$,

puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x > 3/2}} -\frac{1}{2x - 3} = -\infty$.

Par somme, on obtient alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x > 3/2}} f(x) = -\infty$.

3. On interprète les limites obtenues à la question précédente.

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x > 3/2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x < 3/2}} f(x) = +\infty$,

on sait que \mathcal{C} admet une asymptote verticale d d'équation $x = \frac{3}{2}$.

De plus, $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2x - 3}$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0$,

donc \mathcal{C} admet également une asymptote oblique d' d'équation $y = -x + 1$.

4. On étudie le signe de la différence $f(x) - (-x + 1)$. Or, $f(x) - (-x + 1) = -\frac{1}{2x - 3}$.

• Si $x < \frac{3}{2}$, on a

$$\begin{aligned} 2x &< 3 \\ 2x - 3 &< 0 \\ \frac{1}{2x - 3} &< 0 \\ -\frac{1}{2x - 3} &> 0 \\ f(x) - (-x + 1) &> 0 \end{aligned}$$

Donc

sur l'intervalle $] -\infty; \frac{3}{2}[$, la courbe \mathcal{C} est au-dessus de son asymptote oblique d' .

• Si $x > \frac{3}{2}$, on a

$$\begin{aligned} 2x &> 3 \\ 2x - 3 &> 0 \\ \frac{1}{2x - 3} &> 0 \\ -\frac{1}{2x - 3} &< 0 \\ f(x) - (-x + 1) &< 0 \end{aligned}$$

Donc

sur l'intervalle $]\frac{3}{2}; +\infty[$, la courbe \mathcal{C} est en-dessous de son asymptote oblique d' .

5. Courbe :

