

**Exercice 1.**

(a)  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x+5}$

La fonction  $f$  s'écrit sous forme d'un quotient. Elle est correctement définie lorsque  $x^2 + 2x + 5 \neq 0$ . Cherchons donc les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $x^2 + 2x + 5 = 0$ , c'est-à-dire les racines du trinôme  $x^2 + 2x + 5$ . Le discriminant de ce trinôme vaut

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16$$

$\Delta < 0$  donc le trinôme n'a pas de racine, ce qui signifie que le dénominateur de  $f$  ne s'annule pour aucune valeur de  $x$ . Il n'y a donc pas de valeur interdite.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

(b)  $g(x) = 2x + 1 - 3\sqrt{3x-1}$

La fonction  $g$  fait intervenir une racine carrée. Elle est bien définie lorsque la quantité sous la racine est positive ou nulle, c'est-à-dire

$$3x - 1 \geq 0$$

Or

$$3x - 1 \geq 0 \iff 3x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{D}_g = \left[ \frac{1}{3}; +\infty[ \right]$$

(c)  $h(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{x^2+1}{-2x^2-4x+30}$

$h$  comprend deux termes qui sont des quotients, donc  $h$  est bien définie lorsque  $x \neq 0$  et  $-2x^2 - 4x + 30 \neq 0$ . On note que 0 est une valeur interdite, puis on résout  $-2x^2 - 4x + 30 = 0$  pour déterminer les autres valeurs interdites.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 30 = 16 + 8 \times 30 = 256 = 16^2$$

donc le trinôme admet deux racines

$$x_1 = \frac{4-16}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$x_2 = \frac{4+16}{-4} = \frac{20}{-4} = -5$$

Ce sont les deux valeurs interdites pour  $h$ . Donc

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0; 3\} = ]-\infty; -5[ \cup ]-5; 0[ \cup ]0; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

(d)  $k(x) = \sqrt{2x^2 + 4x - 6}$

La quantité sous la racine doit être positive ou nulle. On cherche donc les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $2x^2 + 4x - 6 \geq 0$ . Pour cela, il faut déterminer le signe du trinôme  $2x^2 + 4x - 6$ .

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 8 \times 6 = 64 = 8^2$$

Le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4-8}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-4+8}{4} = 1$$

On en déduit le signe du trinôme, car  $a = 2$  est positif :

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$	
Signe de $2x^2 + 4x - 6$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$

L'ensemble de définition de  $k$  est constitué des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $2x^2 + 4x - 6 \geq 0$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_k = ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

**Exercice 2.**

(a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - \frac{1}{x}$

On procède par étapes.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ ,

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{puis } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x} = -\infty$$

D'autre part,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 = 1$ , donc par somme, on obtient  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation  $x = 0$  au voisinage de 0.

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 = 5 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 5 = +\infty}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5 \end{array} \right\} \text{ La somme est une forme indéterminée}$$

Pour lever l'indétermination, on factorise la partie en  $x$  :

$$x^2 - 3x + 5 = x(x - 3) + 5$$

On applique alors les règles du produit.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 3) = +\infty$$

Puis, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$ , on a , d'après la règle de la somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 3) + 5 = +\infty, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 5 = +\infty}.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = -\infty}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 = -\infty}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 + \frac{1}{x - 2}$$

On étudie d'abord la limite en  $+\infty$  du terme  $\frac{1}{x - 2}$ . On a

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$$

D'après la règle de l'inverse, on a alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

(premier résultat intermédiaire).

Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty$  (raisonnement par somme, je ne détaille plus).

Par somme de ce résultat et du résultat intermédiaire, on a alors

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 + \frac{1}{x - 2} = -\infty}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 3}$$

On en conclut que la courbe associée admet une

$\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 3}$  au voisinage de  $-\infty$ .

$$(h) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 + x}{(x + 3)^2}$$

On peut écrire

$$\frac{2 + x}{(x + 3)^2} = (2 + x) \times \frac{1}{(x + 3)^2}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -3} (2 + x) = 2 + (-3) = -1$$

et d'autre part, d'après le cours,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x + 3)^2} = +\infty$$

Par produit, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -3} (2+x) \times \frac{1}{(x+3)^2} = -\infty$$

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation  $x = -3$  au voisinage de  $-3$ .

### Exercice 3.

On traduit les trois tableaux de variation en termes de limites, puis on étudiera quelles sont les courbes cohérentes avec les informations des tableaux de variation.

D'après le tableau de variation de  $f_1$ , on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) &= -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_1(x) &= +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_1(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) &= +\infty \end{aligned}$$

En conséquence des deuxième et troisième limites, on peut affirmer que la courbe de  $f_1$  admet une asymptote verticale au voisinage de 1, d'équation  $x = 1$ . La courbe de  $f_1$  peut donc être la courbe  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  ou  $\mathcal{C}_4$ , mais pas  $\mathcal{C}_3$ .

En conséquence de la première et de la dernière limites, on peut également affirmer que la courbe de  $f_1$  n'admet pas d'asymptote horizontale, ni au voisinage de  $-\infty$ , ni au voisinage de  $+\infty$ . Ceci élimine les courbes  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_4$ . Finalement,

$f_1$  correspond à la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

D'après le tableau de variation de  $f_2$ , on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) &= 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f_2(x) &= +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f_2(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= 1 \end{aligned}$$

Des deuxième et troisième limites, on déduit que la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à la courbe de  $f_2$  au voisinage de 2. Seule la courbe  $\mathcal{C}_2$  correspond à cette propriété.

La fonction  $f_2$  correspond donc à la courbe  $\mathcal{C}_2$ .

D'après le tableau de variation de  $f_3$ , on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) &= 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_3(x) &= +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) &= 2 \end{aligned}$$

D'après les deuxième et troisième limites, on sait que la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à la courbe de  $f_3$  au voisinage de 1. La courbe de  $f_3$  peut donc être soit  $\mathcal{C}_2$ , soit  $\mathcal{C}_3$ .

En conséquence des première et dernière limites, on peut également affirmer que la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote horizontale à la courbe de  $f_3$  au voisinage de  $-\infty$  et au voisinage de  $+\infty$ , ce qui élimine la courbe  $\mathcal{C}_2$  car la droite d'équation  $y = 2$  ne lui est pas asymptote au voisinage de  $-\infty$ .

Finalement, la fonction  $f_3$  correspond à la courbe  $\mathcal{C}_3$ .