

**Exercice 1.**

- La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-3; -2]$  uniquement. **Réponse c.**
- On a  $f(x) \geq 0$  sur l'intervalle  $[-3; -1]$ . La **réponse a** est donc correcte, ainsi que la **réponse c.**
- $f(x) = -2x = 1$  uniquement. **Réponse c.**
- Sur l'intervalle  $[-2; 1]$ ,  $f$  est décroissante, et même strictement décroissante. De plus,  $f$  n'a pas de signe constant, puisqu'elle est strictement positive sur  $[-2; -1]$ , et strictement négative sur  $] -1; 1]$ . **Réponse a** uniquement.
- L'image de  $-2$  par  $f$  est égale à 2. **Réponse b.**
- La fonction carré est croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Seule la **réponse b** est correcte.

**Exercice 2.**

- La courbe  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $g_1$  est obtenue à partir de  $\mathcal{C}$  en effectuant une translation horizontale de 3 unités vers la gauche, et une translation verticale de 4 carreaux vers le bas. Comme  $g(x) = x^2$ , l'expression de  $g_1(x)$  est alors

$$g_1(x) = (x + 3)^2 - 4$$

- La courbe  $\mathcal{C}_2$  est obtenue à partir de  $\mathcal{C}$  en effectuant une translation verticale de deux unités vers le bas. L'expression de  $g_2(x)$  est alors

$$g_2(x) = x^2 - 2$$

- La courbe  $\mathcal{C}_3$  est obtenue à partir de  $\mathcal{C}$  en effectuant une translation verticale de trois unités vers le haut. L'expression de  $g_3(x)$  est alors

$$g_3(x) = x^2 + 3$$

- La courbe  $\mathcal{C}_4$  est obtenue à partir de  $\mathcal{C}$  en effectuant une translation horizontale de quatre unités vers la droite. L'expression de  $g_4(x)$  est alors

$$g_4(x) = (x - 4)^2$$

**Exercice 3.**

- Le domaine de définition de  $v$  est  $[0; +\infty[$  (à cause de la racine carrée). On peut définir  $u$  suivie de  $v$  lorsque  $x$  est tel que  $u(x)$  est positif. On doit résoudre l'équation

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

C'est une inéquation du second degré. On la résout en utilisant le discriminant.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

Le trinôme a donc deux racines :

$$x' = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Comme  $a = -1$  est négatif, le signe du trinôme est donné par :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
Signe de $-x^2 + 2x + 3$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$

$$\mathcal{S} = [-1; 3]$$

Pour que  $u(x)$  reste positif ou nul, il faut que  $x$  appartienne à  $\mathcal{D} = [-1; 3]$ . Donc  $u$  suivie de  $v$  est correctement définie pour  $x \in [-1; 3]$ .

- Pour  $x \in \mathcal{D}$ ,  $u$  suivie de  $v$  est obtenue de la façon suivante :

$$x \xrightarrow{u} -x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{v} -3\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 1$$

Donc pour  $x \in \mathcal{D}$ ,  $v(u(x)) = -3\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 1$ .

- La courbe représentative de  $u$  est une parabole, dont le sommet correspond à un maximum (puisque  $a = -1$  est négatif). L'abscisse de ce maximum est égale à

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$$

Donc sur  $] -\infty; 1]$ ,  $u$  est croissante, et sur  $[1; +\infty[$ ,  $u$  est décroissante.

Or, on s'intéresse uniquement à l'intervalle  $\mathcal{D} = [-1; 3]$ . Donc sur  $[-1; 1]$ ,  $u$  est croissante, et sur  $[1; 3]$ ,  $u$  est décroissante.

Étudions maintenant le sens de variation de  $v$ ,  $v(x) = -3\sqrt{x} + 1$ . On sait que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ . Donc  $x \mapsto -3\sqrt{x}$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$  (multiplication par une constante **négative**), puis  $x \mapsto -3\sqrt{x} + 1$  est décroissante aussi (ajout d'une constante). Donc,  $v$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

**Conclusion :**

- Sur  $[-1; 1]$ ,  $u$  est croissante, et  $v$  est décroissante. Donc par composition,  $u$  suivie de  $v$  est décroissante.
- Sur  $[1; 3]$ ,  $u$  est décroissante, et  $v$  est décroissante. Donc  $u$  suivie de  $v$  est croissante.

### Exercice 4.

1.

$$x \xrightarrow{u} x+4 \xrightarrow{v} 2(x+4)^2 - 3(x+4) + 1$$

soit  $f(x) = 2(x+4)^2 - 3(x+4) + 1 = 2x^2 + 13x + 21$ .

2.

$$x \xrightarrow{u} x^2 - 1 \xrightarrow{v} \frac{3}{x^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - 1} + 5$$

soit  $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - 1} + 5$ .

### Exercice 5.

1. On développe l'expression de  $f$  :  $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$ , et on remarque ainsi que  $f$  est une fonction trinôme du second degré. Comme  $a = -3$  est négatif, la courbe de  $f$  admet un maximum, en un point d'abscisse

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-6} = 1$$

De plus, la valeur de ce maximum est  $f(1) = -3 + 6 + 1 = 4$ . On obtient le tableau de variation complet de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f$		4	

2. (a) Sur  $]0; +\infty[$  :

–  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante,

– donc  $x \mapsto -\frac{3}{x}$  est croissante (multiplication par une constante négative).

– D'autre part,  $x \mapsto 2x + 1$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  (fonction affine pour laquelle  $a = 2$  est positif).

– Donc par somme de deux fonctions croissantes, la fonction  $x \mapsto -\frac{3}{x} + 2x + 1$

est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

(b)  $f(x) = (2x-3)^2$  est la composée  $u$  suivie de  $v$  avec  $u(x) = 2x-3$  et  $v(x) = x^2$ .

Or,  $u$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , et pour  $x \in ]-\infty; \frac{3}{2}[$ , on a  $u(x) < 0$ . On peut le vérifier par un petit calcul :

$$\begin{aligned} x &< \frac{3}{2} \\ 2x &< 3 \\ 2x - 3 &< 0 \end{aligned}$$

Donc pour  $x \in ]-\infty; \frac{3}{2}[$ , on a  $u(x) \in ]-\infty; 0[$ .

Or,  $v$  est décroissante sur  $] - \infty; 0[$ .

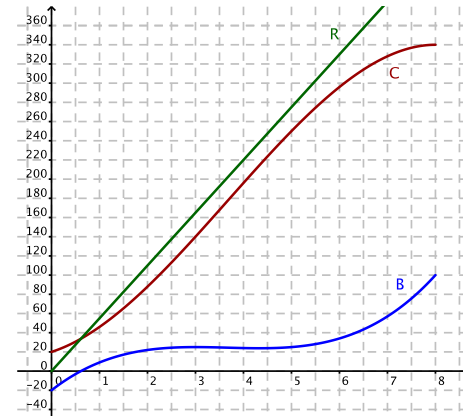
Donc sur  $] - \infty; \frac{3}{2}[$ ,  $f$  est décroissante en tant que composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

(c)  $f$  est la composée  $u$  suivie de  $v$  avec  $u(x) = 3x + 2$  et  $v(x) = \sqrt{x}$ . Or,  $u$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , et  $v$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $f$  est croissante en tant que composée de deux fonctions croissantes.

### Exercice 6.

#### PARTIE A

- (a) Le coût de fabrication de 8 quintaux est égal à 340 milliers d'euros, soit 340 000 €.
- (b) Pour un coût de fabrication de 196 000 €, on a fabriqué environ 4 quintaux de produit.



- Pour la fabrication de 8 quintaux de produit, le coût de fabrication est de 340 000 €, la recette est de 440 000 €, le bénéfice réalisé est donc de 100 000 €.
- Graphiquement, le bénéfice réalisé est positif ou nul à partir d'une production de 0,6 quintaux, soit 60 kg.

#### PARTIE B

1. Le coût de fabrication est donné par  $C(x) = -x^3 + 11x^2 + 16x + 20$ . La recette est donnée par  $R(x) = 55x$ . Le bénéfice s'exprime donc :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 55x - (-x^3 + 11x^2 + 16x + 20) = x^3 - 11x^2 + 39x - 20$$

On représente à la calculatrice la courbe de la fonction  $x \mapsto x^3 - 11x^2 + 39x - 20$ . On retrouve bien la courbe donnée par l'énoncé.

2. On lit directement sur la courbe du bénéfice que celui-ci est positif à partir de 0,6 quintaux.