

Exercice 1.

1. Le taux d'évolution du nombre d'habitants de cette ville de 2002 à 2006 est égal à

$$\frac{139\,860 - 157\,500}{157\,500} \times 100 = -11,2 \%$$

C'est une diminution, il est donc cohérent de trouver un taux d'évolution négatif.

Réponse c.

2. Le coefficient multiplicateur d'une augmentation de 3,2 % est 1,032. Le coefficient multiplicateur de dix augmentations successives de 3,2 % est

$$(1,032)^{10} = \underbrace{1,032 \times 1,032 \times \dots \times 1,032}_{10 \text{ fois}} \approx 1,37$$

Ce coefficient multiplicateur correspond à une augmentation de 37 %. **Réponse c.**

3. La série comporte $10 + 12 + 15 + 13 + 5 + 5 + 1 = 61$ valeurs au total. Ce nombre est impair, la médiane est donc la 31^e valeur de la série. Or $10 + 12 = 22 < 31$ et $10 + 12 + 15 = 37 > 31$, donc la 31^e valeur correspond à une peinture 42.

Réponse b.

4. Une baisse de 25 % correspond à un coefficient multiplicateur égal à 0,75. Cette baisse est compensée par un coefficient multiplicateur égal à $\frac{1}{0,75}$, c'est-à-dire 1,33 (arrondi à 0,01). Enfin, ce coefficient multiplicateur de 1,33 correspond à une augmentation de 33 %. **Réponse c.**

5. On calcule les coefficients multiplicateurs de chacune des évolutions :

$$CM_{2004} = 1,07, CM_{2005} = 1,05 \text{ et } CM_{2006} = 1,06.$$

Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs :

$$CM = CM_{2004} \times CM_{2005} \times CM_{2006} = 1,07 \times 1,05 \times 1,06 \approx 1,19$$

Le coefficient 1,19 correspond à une augmentation de 19 % (arrondie à l'unité).

Réponse c.

6. Une baisse de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de 0,9. Pour n baisses successives de 10 %, le coefficient multiplicateur est $0,9^n$. Une baisse de 70 % correspond à un coefficient égal à 0,3. On cherche donc la plus petite valeur de n pour laquelle $0,9^n < 0,3$.

Or, $0,9^{11} \approx 0,31$ ne convient pas, car cela correspond à une baisse de 69 % environ. En revanche $0,9^{12} \approx 0,28$ correspond à une baisse de 72 %. Il faut donc attendre 12 années pour que le produit ait perdu au moins 70 % de sa valeur. **Réponse c.**

Exercice 2.

1. (a) Traduisons d'abord la contrainte sur l'espace total planté. On plante x hectares en pins sylvestres, y hectares en douglas, et la surface totale (surface de pins sylvestres + surface de douglas) ne peut excéder 40 hectares. Cette contrainte se traduit par l'inéquation : $x + y \leq 40$.

La contrainte d'espace sur la surface de douglas se traduit par : $y \leq 28,5$ (même principe).

Traduisons à présent la contrainte de coût. Le coût total ne peut excéder 14 000 €. Or, le coût total de plantation correspond à la somme du coût de plantation en pins sylvestres, et du coût de plantation en douglas.

Considérons le coût d'une plantation de x hectares de pins sylvestres. On sait que chaque plant de pin sylvestre coûte 0,2 €. Pour connaître le coût de la plantation, il faut déterminer combien de pins sylvestres il y aura sur une plantation de x hectares de pins sylvestres. Or, il y a en moyenne 2 000 pins sylvestres à l'hectare, ce qui fait 2 000 x pins sylvestres dans x hectares. A 0,2 € du plant de pin sylvestre, le coût d'une plantation de 2 000 x pins sylvestres est alors $0,2 \times 2\,000x = 400x$ €.

Faisons de même pour évaluer le prix de plantation de y hectares de douglas : y hectares de douglas représentent une moyenne de 1 200 y arbres ; leur prix unitaire étant 0,25 €, le coût en douglas est de $0,25 \times 1\,200y = 300y$.

La contrainte de coût s'exprime alors par $400x + 300y \leq 14\,000$. En simplifiant cette inéquation par 100, on obtient $4x + 3y \leq 140$.

Finalement, le système des contraintes est le suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 40 \\ 4x + 3y \leq 140 \\ y \leq 28,5 \end{cases}$$

où x et y sont des nombres positifs (mais pas forcément entiers : par exemple, on peut avoir $y = 28,5$ hectares de douglas).

- (b) En plus des deux axes du repère, d'équation $x = 0$ et $y = 0$, les droites frontières ont pour équation

$$\begin{cases} d_1 : x + y = 40 \\ d_2 : 4x + 3y = 140 \\ d_3 : y = 28,5 \end{cases}$$

On met ces équations de droite sous la forme réduite (type $y = mx + p$). On

obtient

$$\begin{cases} d_1 : y = -x + 40 & \text{(représentée en rouge)} \\ d_2 : y = -\frac{4}{3}x - \frac{140}{3} & \text{(représentée en vert)} \\ d_3 : y = 28,5 & \text{(représentée en magenta)} \end{cases}$$

Pour la première inéquation, le bon demi-plan correspond au demi-plan situé en-dessous de d_1 . De même pour d_2 et d_3 . Le domaine des contraintes est alors le domaine compris entre l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, et délimité par les points M , N , P et Q en orange (voir figure sur la page suivante).

- (c) Le point d'intersection de d_1 et d_2 est tel que $-x + 40 = -\frac{4}{3}x + \frac{140}{3}$, d'où $\frac{1}{3}x = \frac{100}{3} - 28,5$ c'est-à-dire $x = 14,5$. On obtient ensuite $y = 28,5 - x = 14$.

Le point d'intersection de d_1 et d_2 a donc pour coordonnées $P(20; 20)$.

Le point d'intersection de d_1 et d_3 est tel que $28,5 = -x + 40$ d'où $x = 12,5$, puis $y = 28,5$. Les droites d_1 et d_3 se coupent donc au point de coordonnées $N(12,5; 28,5)$.

Compte tenu de la figure, le point d'intersection de d_2 et d_3 se trouve en-dehors du domaine des contraintes. Ce point ne nous intéresse donc pas.

2. (a) Pour la recette, on considère uniquement l'argent de la vente des arbres, comme mentionné dans l'énoncé, sans se préoccuper du coût de plantation.

La recette est de 22 800 € par hectare planté en pins sylvestres (et il y a x hectares de pins sylvestres) et 45 500 € par hectare de douglas (il y en a y). La recette totale est donc donnée par la somme :

$$R(x, y) = 22\,800x + 45\,500y$$

- (b) Pour une recette R fixée, l'équation de la droite de recette est $22\,800x + 45\,500y = R$. La forme réduite de cette équation de droite est :

$$y = -\frac{228}{455}x + \frac{R}{45\,500}$$

Son coefficient directeur vaut $\frac{228}{455}$, et son ordonnée à l'origine est proportionnelle

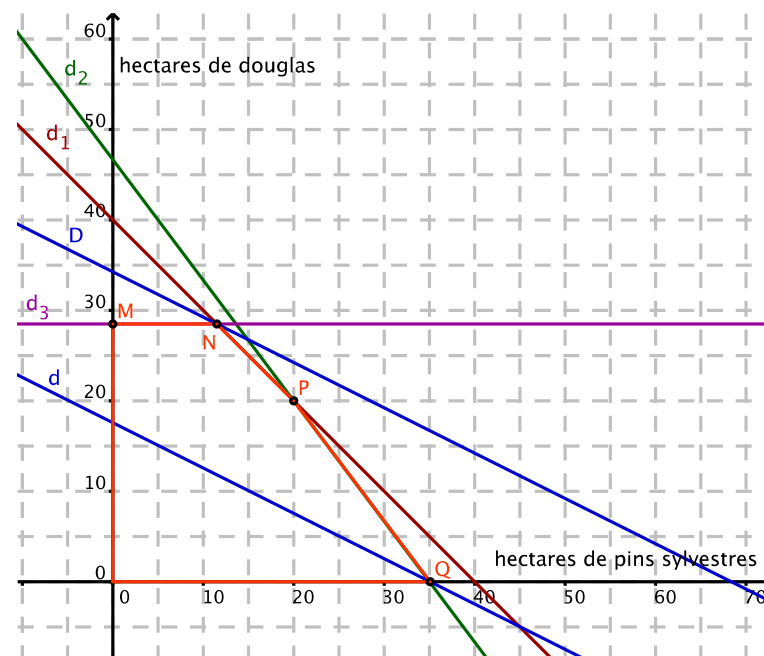
à R : $\frac{R}{45\,500}$.

- (c) Pour une recette de 800 000 euros (on remplace R par 800 000 dans l'équation ci-dessus), l'équation de la droite de recette est, en arrondissant les coefficients à une décimale : $y = 0,5x + 17,8$. On représente en bleu la droite de recette sur le graphique, notée d .
- (d) Les droites de recette sont toutes parallèles entre elles, puisqu'elles ont la même pente. En revanche, leur ordonnée à l'origine varie avec la recette : l'ordonnée à l'origine est d'autant plus grande que la recette est élevée. La droite de recette

correspondant à la recette maximale est donc la droite parallèle à d dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande, tout en gardant au moins un point dans le domaine des contraintes. Il suffit alors de prendre la droite parallèle à d passant par le point N de coordonnées $(12,5; 28,5)$ (point d'intersection de d_1 et de d_3). Cette droite de recette a exactement un point dans le domaine des contraintes, c'est le point N ; et elle correspond à la recette maximale, car une droite de recette ayant une ordonnée à l'origine plus élevée n'aura plus aucun point dans le domaine des contraintes. On note cette droite D et on la représente en bleu sur le graphique. Son ordonnée à l'origine est, graphiquement, d'un peu moins de 35.

Le couple $(x_0; y_0)$ associé à cette recette est le couple des coordonnées du point N : $(12,5; 28,5)$. La plantation correspondante correspond à planter 28,5 hectares en douglas (qui est la surface maximale qu'il est possible de planter en douglas), et le restant, soit 12,5 hectares, en pins sylvestres. La recette totale vaut alors

$$R(12,5, 28,5) = 22\,800 \times 12,5 + 45\,500 \times 28,5 = 1\,581\,750 \text{ €}$$



Exercice 3.

1. Il y a au total 154 étudiants, dont n filles et p garçons. Donc $n + p = 154$.
D'autre part, la taille moyenne (en mètres) des étudiants est 1,7. Or cette moyenne est de 1,63 pour le groupe des n filles, et 1,74 pour le groupe des p garçons. On a donc

$$\frac{1,63n + 1,74p}{n + p} = 1,7$$

ou encore, $1,63n + 1,74p = 1,7(n + p)$. D'où le système proposé.

2. On résout le système par substitution. On réécrit d'abord la deuxième équation $1,63n + 1,74p = 1,7 \times 154$ puisqu'on sait que $n + p = 154$ (effectif total).
On a, d'après la première équation : $n = 154 - p$. On reporte dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} 1,63(154 - p) + 1,74p &= 1,7 \times 154 \\ 251,02 + 0,11p &= 261,8 \\ 0,11p &= 10,78 \end{aligned}$$

d'où $p = 98$ (on doit tomber exactement sur un nombre entier!).

On en déduit $n = 154 - 98 = 56$.

Il y a donc 98 garçons et 56 filles parmi les étudiants.

Exercice 4.

1. L'effectif de la classe $[21; 36[$ est égal à 15. Or, le rectangle associé à cette classe comporte 5 carreaux. On en déduit que un carreau représente un effectif de 3.
La classe $[18; 21[$ est représentée par 3 carreaux. Son effectif est donc égal à 9. On complète de même le reste du tableau. Le nombre de carreaux associés à la classe $[0; 12[$ est égal à $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$. L'effectif associé est donc égal à 8.

Classe	$[0; 12[$	$[12; 15[$	$[15; 18[$	$[18; 21[$	$[21; 36[$
Effectif	8	6	12	9	15

2. La série comporte au total 50 valeurs.

L'effectif total est un nombre pair. La médiane est donc donnée par la moyenne entre la 25^e et la 26^e valeurs. D'après le tableau, ces deux valeurs se trouvent toutes les deux dans la classe $[15; 18[$. Donc la médiane se trouve également dans cette classe.

$\frac{1}{4} \times 50 = 12,5$, donc le premier quartile de la série correspond à la 13^e valeur. D'après le tableau, cette valeur se trouve dans la classe $[12; 15[$.

$\frac{3}{4} \times 50 = 37,5$, donc le troisième quartile de la série correspond à la 38^e valeur. D'après le tableau, cette valeur se trouve dans la classe $[21; 36[$.

NB : On peut faire le tableau des effectifs cumulés pour repérer plus facilement les différentes valeurs. On obtiendrait ceci :

Classe	$[0; 12[$	$[12; 15[$	$[15; 18[$	$[18; 21[$	$[21; 36[$
Effectif cumulé	8	14	26	35	50

Exercice 5.

Quantité produite	8	14	24
1. Coût total de production	200	375	840
Recette	280	480	840

2. Pour 20 hectolitres vendus, la recette est égale à 700 (en centaines d'euros). Donc pour un hectolitre, la recette est égale à 35 (prix unitaire). La recette est donc donnée par $R(q) = 35q$, puisque c'est une fonction linéaire de q .
3. (a) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la droite correspondant à $R(q)$ se trouve au-dessus de la courbe correspondant au coût de production $C(q)$, c'est-à-dire pour les abscisses q variant entre 3,5 environ et 24. $\mathcal{S} = [3,5; 24]$.
- (b) Pour 18 hectolitres, le coût de production est d'environ 540 centaines d'euros, la recette d'environ 640 centaines d'euros, ce qui fait un bénéfice de 100 centaines d'euros environ, autrement dit 10 000 euros.
4. (a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût de production. Il est égal à

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ B(q) &= 35q - \left(\frac{13}{12}q^2 + \frac{16}{3}q + 88 \right) \\ B(q) &= -\frac{13}{12}q^2 + \frac{89}{3}q - 88 \end{aligned}$$

- (b) On cherche les valeurs de q pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice, c'est-à-dire $B(q) \geq 0$. On résout donc l'inéquation

$$-\frac{13}{12}q^2 + \frac{89}{3}q - 88 \geq 0$$

On calcule le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta = \left(\frac{89}{3} \right)^2 - 4 \times \left(-\frac{13}{12} \right) \times (-88) = \frac{7921}{9} - \frac{1144}{3} = \frac{4489}{9} = \left(\frac{67}{3} \right)^2$$

Il y a donc deux racines, et $\sqrt{\Delta} = \frac{67}{3}$.

$$x' = \frac{-\frac{89}{3} - \frac{67}{3}}{-\frac{13}{6}} = \frac{-\frac{156}{3}}{-\frac{13}{6}} = \frac{312}{13} = 24$$

$$x'' = \frac{-\frac{89}{3} + \frac{67}{3}}{-\frac{13}{6}} = \frac{-\frac{22}{3}}{-\frac{13}{6}} = \frac{44}{13}$$

Les deux racines de $B(q)$ sont donc $x' = 24$ et $x'' \approx 3,4$. Ce sont les deux valeurs pour lesquelles le bénéfice réalisé est nul (la recette compense exactement le coût de production).

Pour déterminer l'intervalle dans lequel le bénéfice est positif, il faut étudier le signe de $B(q)$. Or, $a = -1$ est négatif, donc le signe de B est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	x''	24	$+\infty$	
Signe de $B(q)$	$-$	\emptyset	$+$	\emptyset	$-$

On en déduit que le bénéfice est positif lorsque q appartient à l'intervalle $[3,4; 24]$. On a bien retrouvé le résultat de la question 3 (a).

Pour finir, on cherche le bénéfice associé à la vente de 18 hectolitres. Il faut calculer $B(18)$. Or

$$B(18) = -\frac{13}{12} \times 18^2 + \frac{89}{3} \times 18 - 88 \approx 95$$

ce qui fait un bénéfice de 9 500 euros. La valeur lue graphiquement à la question 3 (b) était donc une bonne approximation du bénéfice réalisé.