

Exercice 1.

1. La largeur AB est égale à x . Notons provisoirement y la longueur du rectangle, égale à BC . On sait que la ligne de bouées fait 80 mètres de long, c'est-à-dire que $AB + BC + CD = 80$, ou encore $2x + y = 80$. Donc on peut exprimer y en fonction de x : $y = 80 - 2x$.

L'aire du rectangle $ABCD$ est alors égale à :

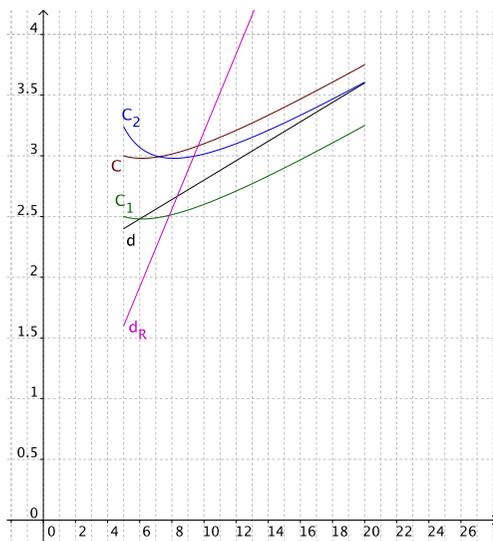
$$\mathcal{A}(x) = x \times y = x \times (80 - 2x) = -2x^2 + 80x$$

2. La fonction $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 80x$ est une fonction trinôme du second degré avec $a = -2$, $b = 80$ et $c = 0$. Sa courbe représentative est une parabole de sommet α . Ici, $a = -2$ est négatif, donc le sommet de la parabole correspond à un maximum. L'abscisse de ce sommet est donnée par

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{-4} = 20$$

L'aire maximale est donc atteinte lorsque la largeur x est égale à 20 mètres. Dans ce cas, la longueur est égale à $y = 80 - 2 \times 20 = 40$. Le rectangle d'aire maximale, pour une ligne de bouées de 80 mètres, est donc le rectangle de 20 mètres de large et de 40 mètres de long.

Exercice 2.



1. (a)

- (b) Montrer que \mathcal{C} est au-dessus de la droite d revient à montrer que pour $x > 0$, $f(x) \geq 0,08x + 2$. Or,

$$f(x) - (0,08x + 2) = 0,08x + 2 + \frac{3}{x} - (0,08x + 2) = \frac{3}{x}$$

et pour tout $x > 0$, $\frac{3}{x} > 0$.

Donc $f(x) - (0,08x + 2) > 0$, donc $f(x) > 0,08x + 2$, ce qui assure que la courbe \mathcal{C} est toujours au-dessus de la droite d d'équation $y = 0,08x + 2$.

2. On exprime en milliers d'euros la recette R réalisée en fonction de la quantité x vendue, en milliers de litres. Un litre est vendu 0,32 €, donc 1 000 litres sont vendus 0,32 milliers d'euros, et x milliers de litres sont vendus $0,32x$ milliers d'euros. D'où $R(x) = 0,32x$.

On trace dans le repère précédent la droite d_R d'équation $y = 0,32x$.

La production est rentable lorsque la recette est supérieure au coût de production, c'est-à-dire lorsque la droite d_R est au-dessus de la courbe \mathcal{C} associée à la fonction f . Cela correspond à $x \in [9, 6; 20]$.

3. (a) Lorsque le coût moyen est diminué de 500 €, on a $f_1(x) = f(x) - 0,5$, d'où $f_1(x) = 0,08x + 1,5 + \frac{3}{x}$.
- (b) On représente la courbe \mathcal{C}_1 (courbe verte) en faisant une translation verticale vers le bas, de 0,5 unités, à partir de la courbe \mathcal{C} .
- (c) Dans ces nouvelles conditions, la production est rentable lorsque d_R est au-dessus de \mathcal{C}_1 , c'est-à-dire pour $x \in [7, 8; 20]$.
4. (a) Désormais, le coût de production de x milliers de litres est le même que l'ancien coût de fabrication pour une quantité inférieure de 2000 litres, c'est-à-dire $x - 2$. Donc $f_2(x) = f(x - 2)$.
- (b) Par rapport à la courbe \mathcal{C} , la courbe \mathcal{C}_2 (courbe bleue) est translatée horizontalement de 2 unités vers la droite. On vérifie que pour un coût y fixé, on obtient une quantité produite x plus grande en suivant la courbe \mathcal{C}_2 qu'en suivant la courbe \mathcal{C} .
- (c) Dans ces nouvelles conditions, la production est rentable lorsque d_R est au-dessus de \mathcal{C}_2 , c'est-à-dire pour $x \in [9, 3; 20]$.

Exercice 3.

(a) $x \xrightarrow{u} 3x - 1 \xrightarrow{v} -5(3x - 1) + 2$

donc u suivie de $v : x \mapsto -5(3x - 1) + 2$, autrement dit $v(u(x)) = -15x + 7$.

(b) $x \xrightarrow{u} -5x + 2 \xrightarrow{v} 3(-5x + 2) - 1$

donc u suivie de $v : x \mapsto 3(-5x + 2) - 1$, autrement dit $v(u(x)) = -15x + 5$.(c) On vérifie que la fonction u est bien définie, car on se restreint à $x \geq 0$.

$x \xrightarrow{u} \sqrt{x} \xrightarrow{v} (\sqrt{x})^2 + 1$

Or pour un nombre x positif, $(\sqrt{x})^2 = x$, donc u suivie de $v : x \mapsto x + 1$, autrement dit $v(u(x)) = x + 1$.(d) On vérifie que u suivie de v est bien définie : v n'est définie que pour les nombres x non nuls. Or, pour $x \in]-\infty; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$, $u(x) = 2x - 5$ est différent de 0. Donc on peut appliquer v au réel $u(x)$.

$x \xrightarrow{u} 2x - 5 \xrightarrow{v} \frac{1}{2x - 5}$

donc u suivie de $v : x \mapsto \frac{1}{2x - 5}$, autrement dit $v(u(x)) = \frac{1}{2x - 5}$.**Exercice 4.**

(a) On peut écrire : $f(x) = 3\sqrt{x} - 10 = 3u(x) - 10$ avec $u(x) = \sqrt{x}$,

puis $f(x) = 3u(x) - 10 = v(u(x))$ avec $v(x) = 3x - 10$.

Donc la fonction f se décompose comme u suivie de v de la manière suivante :

$$f : x \xrightarrow{u} \sqrt{x} \xrightarrow{v} 3\sqrt{x} - 10$$

avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x - 10$.

(b) $f(x) = \sqrt{2x - 5} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 2x - 5$,

puis $f(x) = \sqrt{2x - 5} = \sqrt{u(x)} = v(u(x))$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

Donc la fonction f se décompose comme u suivie de v de la manière suivante :

$$f : x \xrightarrow{u} 2x - 5 \xrightarrow{v} \sqrt{2x - 5}$$

avec $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{2}(2x + 3)^2 - 5 = \frac{1}{2}(u(x))^2 - 5$ avec $u(x) = 2x + 3$,

puis $f(x) = \frac{1}{2}(2x + 3)^2 - 5 = \frac{1}{2}(u(x))^2 - 5 = v(u(x))$ avec $v(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$.

Donc la fonction f se décompose comme u suivie de v de la manière suivante :

$$f : x \xrightarrow{u} 2x + 3 \xrightarrow{v} \frac{1}{2}(2x + 3)^2 - 5$$

avec $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$.

(d) $f(x) = \frac{1}{3x + 6} + 2 = \frac{1}{u(x)} + 2$ avec $u(x) = 3x + 6$,

puis $f(x) = \frac{1}{3x + 6} + 2 = \frac{1}{u(x)} + 2 = v(u(x))$ avec $v(x) = \frac{1}{x} + 2$.

Donc la fonction f se décompose comme u suivie de v de la manière suivante :

$$f : x \xrightarrow{u} 3x + 6 \xrightarrow{v} \frac{1}{3x + 6} + 2$$

avec $u(x) = 3x + 6$ et $v(x) = \frac{1}{x} + 2$.