

Exercice 1.

1. (a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= 3\overrightarrow{AB} \\ \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_E - (-1) \\ y_E - 3 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_E + 1 \\ y_E - 3 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

 x_E et y_E sont solution des équations

$$\begin{aligned}x_E + 1 &= 6 & \text{et} & & y_E - 3 &= -6 \\ x_E &= 5 & & & y_E &= -3\end{aligned}$$

D'où $\boxed{E(5; -3)}$.(b) C est le milieu de $[AF]$, donc

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{x_A + x_F}{2} & \text{et} & & y_C &= \frac{y_A + y_F}{2} \\ 2 &= \frac{-1 + x_F}{2} & & & 2 &= \frac{3 + y_F}{2} \\ 4 &= -1 + x_F & & & 4 &= 3 + y_F \\ 5 &= x_F & & & 1 &= y_F\end{aligned}$$

D'où $\boxed{F(5; 1)}$.

(c)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \\ \begin{pmatrix} x_G - (-1) \\ y_G - 3 \end{pmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 4 - 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_G + 1 \\ y_G - 3 \end{pmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_G + 1 \\ y_G - 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

 x_G et y_G sont solution des équations

$$\begin{aligned}x_G + 1 &= 6 & \text{et} & & y_G - 3 &= \frac{3}{2} \\ x_G &= 5 & & & y_G &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{G\left(5; \frac{9}{2}\right)}$.2. On étudie si les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} sont colinéaires. On calcule d'abord les coordonnées de \overrightarrow{EF} et de \overrightarrow{EG} .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} & \overrightarrow{EG} &= \begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{EF} &= \begin{pmatrix} 5 - 5 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} & \overrightarrow{EG} &= \begin{pmatrix} 5 - 5 \\ \frac{9}{2} - (-3) \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{EF} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} & \overrightarrow{EG} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On peut remarquer que $\overrightarrow{EG} = \frac{15}{8}\overrightarrow{EF}$, donc les vecteurs \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{EF} sont colinéaires. Si on ne le voit pas, on applique la méthode et on calcule :

$$xy' - x'y = 0 \times \frac{15}{2} - 4 \times 0 = 0 - 0 = 0$$

ce qui prouve que les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} sont colinéaires.Comme les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} sont colinéaires, $\boxed{\text{les points } E, F, G \text{ sont alignés.}}$

Exercice 2.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si la condition $xy' - x'y = 0$ est vérifiée, ce qui nous donne l'équation :

$$\begin{aligned}2 \times 3 - 5 \times x &= 0 \\ 6 - 5x &= 0 \\ x &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{6}{5} \\ 3 \end{pmatrix}}$.

Exercice 3.

1. Pour démontrer que A , B et C sont alignés, on étudie si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires. On calcule d'abord leurs coordonnées.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} & \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ 3 - 5 \end{pmatrix} & \overrightarrow{AC} & \begin{pmatrix} 12 - (-3) \\ -1 - 5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} & \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} & \overrightarrow{AC} & \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$xy' - x'y = 5 \times (-6) - (-2) \times 15 = -30 + 30 = 0$$

donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Donc les points A , B , C sont alignés.

2. Pour déterminer si le point D appartient à la droite (AB) , on étudie si les points A , B , D sont alignés, c'est-à-dire si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} & \begin{pmatrix} 7 - (-3) \\ \frac{1}{2} - 5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AD} & \begin{pmatrix} 10 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On calcule alors

$$xy' - x'y = 5 \times \left(-\frac{9}{2}\right) - (-2) \times 10 = -\frac{45}{2} + 20 = -\frac{45}{2} + \frac{40}{2} = -\frac{5}{2} \neq 0$$

Donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A , B , D ne sont pas alignés, donc le point D n'appartient pas à la droite (AB) .

3. La longueur AB est égale à

$$\begin{aligned}AB & = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ & = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - 5)^2} \\ & = \sqrt{5^2 + 2^2} \\ & = \sqrt{25 + 4} \\ AB & = \sqrt{29}\end{aligned}$$

La longueur BC est égale à

$$\begin{aligned}BC & = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ & = \sqrt{(12 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} \\ & = \sqrt{10^2 + 4^2} \\ BC & = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Pour démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme, il faut démontrer l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{CD} .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} & \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 3 - 4 \end{pmatrix} & \overrightarrow{CD} & \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ -1 - 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} & \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} & \overrightarrow{CD} & \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On remarque que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

2. Pour déterminer si $ABDC$ est un losange, il faut déterminer si deux côtés consécutifs sont de même longueur. On calcule les longueurs AB et AC .

$$AB = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} & \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 0 - 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} & \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où

$$AC = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

Les longueurs AB et AC sont différentes,

donc le quadrilatère $ABDC$ n'est pas un losange.

Exercice 5.

1. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Cela nous donne l'équation vectorielle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\ \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 - x_D \\ 3 - y_D \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 - x_D \\ 3 - y_D \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où les deux équations portant sur x_D et sur y_D :

$$\begin{array}{lcl} -2 - x_D = 2 & \text{et} & 3 - y_D = 1 \\ -x_D = 4 & & -y_D = -2 \\ x_D = -4 & & y_D = 2 \end{array}$$

Donc le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme a pour coordonnées $D(-4; 2)$.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{FC} .

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -3 - 0 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overrightarrow{FC} \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 3 - 5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{FC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc bien l'égalité $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$, puisque les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

3. On note I le milieu de $[FE]$ et J le milieu de $[BD]$. On espère montrer que les points I et J ont les mêmes coordonnées, donc sont confondus.

I est le milieu de $[FE]$, donc ses coordonnées sont

$$x_I = \frac{x_F + x_E}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

et

$$y_I = \frac{y_F + y_E}{2} = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}$$

D'autre part, J est le milieu de $[BD]$, donc ses coordonnées sont

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

et

$$y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

Ainsi, $I \left(-1; \frac{3}{2} \right)$ et $J \left(-1; \frac{3}{2} \right)$, donc les points I et J sont confondus, c'est-à-dire que $[FE]$ et $[BD]$ ont même milieu.