

## Question de cours

Soient  $u$  et  $v$  deux nombres de l'intervalle  $[0; +\infty[$  tels que  $u \leq v$ . Il s'agit de montrer que  $g(u) \leq g(v)$ , c'est-à-dire  $u^2 + 4 \leq v^2 + 4$ .

Or, on sait que

$$u \leq v$$

De plus,  $u$  et  $v$  sont tous les deux positifs, et la fonction carré est croissante sur  $[0; +\infty[$ . En conséquence, on a :

$$u^2 \leq v^2$$

On ajoute alors 4 aux deux membres de l'inégalité. On obtient

$$u^2 + 4 \leq v^2 + 4$$

c'est-à-dire

$$g(u) \leq g(v)$$

Ceci prouve que la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

## Exercice 1.

- $g$  est une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite, on la trace donc à la règle. En revanche,  $f$  est une fonction liée à la fonction carré. Sa représentation est une courbe lisse.

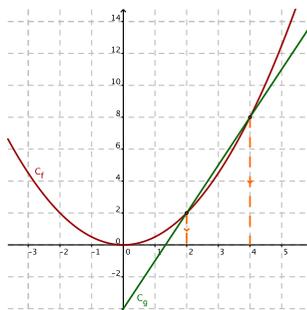


Figure :

- Graphiquement, l'équation  $f(x) = g(x)$  a deux solutions, qui sont  $x = 2$  et  $x = 4$ .
- (a) On développe l'expression donnée dans le membre de droite de l'énoncé. Pour  $x$  réel,

$$\frac{1}{2}(x-2)(x-4) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 4x + 8) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

- (b) On résout l'équation  $f(x) = g(x)$  :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{2}x^2 = 3x - 4 \\ &\iff \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}(x-2)(x-4) = 0 \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &\iff x-2 = 0 \quad \text{ou} \quad x-4 = 0 \quad (\text{équation-produit}) \\ &\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 4 \end{aligned}$$

Algébriquement, l'équation  $f(x) = g(x)$  a pour solutions  $x = 2$  et  $x = 4$ . Ces solutions confirment la lecture graphique.  $\mathcal{S} = \{2; 4\}$ .

- Graphiquement, les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  correspondent à l'intervalle sur lequel la courbe  $\mathcal{C}_f$  est en-dessous de la courbe  $\mathcal{C}_g$ . Cela correspond à l'intervalle  $I = [2; 4]$ .

## Exercice 2.

- On a, pour  $x$  minutes de dépassement du forfait :

$$f_1(x) = 30 + 0,25x$$

$$f_2(x) = 15 + 0,75x$$

$$f_3(x) = 20 + 0,5x$$

- On résout les trois équations demandées :

$$f_1(x) = f_2(x) \iff 30 + 0,25x = 15 + 0,75x$$

$$\iff 15 = 0,50x$$

$$\iff x = \frac{15}{0,50}$$

$$\iff x = 30$$

Les forfaits  $f_1$  et  $f_2$  reviennent au même lorsque le dépassement de forfait atteint 30 minutes.

$$f_2(x) = f_3(x) \iff 15 + 0,75x = 20 + 0,5x$$

$$\iff 0,25x = 5$$

$$\iff x = \frac{5}{0,25}$$

$$\iff x = 20$$

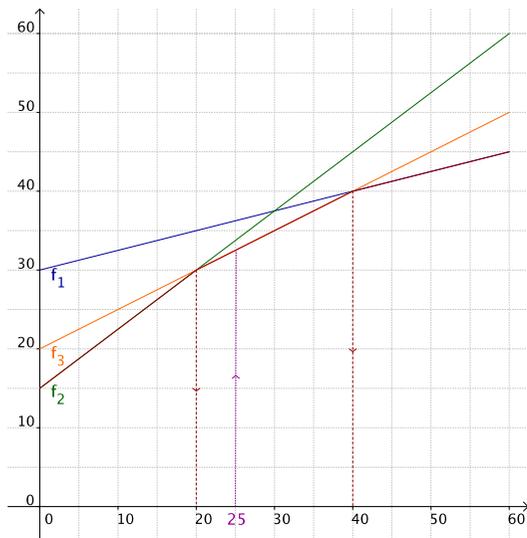
Les forfaits  $f_2$  et  $f_3$  reviennent au même lorsque le dépassement de forfait atteint 20 minutes.

$$\begin{aligned}
 f_1(x) = f_3(x) &\iff 30 + 0,25x = 20 + 0,5x \\
 &\iff 10 = 0,25x \\
 &\iff x = \frac{10}{0,25} \\
 &\iff x = 40
 \end{aligned}$$

Les forfaits  $f_1$  et  $f_3$  reviennent au même lorsque le dépassement de forfait atteint 40 minutes.

3. Représentation graphique :

4. Fonction  $g$  en rouge correspondant au forfait le plus avantageux en fonction du temps  $x$  de dépassement : on suit la courbe verte (formule 2) sur l'intervalle  $[0; 20]$ , puis la courbe orange (formule 3) sur l'intervalle  $[20; 40]$ , puis la courbe bleue (formule 1) sur l'intervalle  $[40; 60]$ .



5. Pour un dépassement mensuel de 25 minutes, c'est la formule 3 (courbe en orange) qui sera la plus intéressante, car c'est la formule qui correspond au point le plus bas.

On peut également calculer  $f_1(25)$ ,  $f_2(25)$  et  $f_3(25)$  et constater que le coût le plus bas est obtenu pour  $f_3(25)$ .

### Exercice 3.

- « Pour tout nombre  $x$ ,  $f(x) \geq 3$  » : faux. Par exemple,  $f(-1)$  vaut 1, et 1 est strictement plus petit que 3.
- « Il existe un nombre  $x$  tel que  $f(x) \geq 3$  » : vrai. Par exemple, il suffit de prendre 1, car  $f(1) = 5$  et  $5 \geq 3$ .
- « Il existe un unique nombre  $x$  tel que  $f(x) = 3$  » : vrai. 3 a un seul antécédent par  $f$ , c'est 0.
- « Pour tout nombre  $a$ , il existe un unique nombre  $b$  tel que  $f(b) = a$  » : vrai. Tout nombre réel a exactement un, et un seul antécédent par  $f$ .