

Question de cours

Pour résoudre une inéquation, il faut :

- se ramener à une inéquation à **second membre nul** ;
- **factoriser** le membre de gauche (après l'avoir mis au même dénominateur si nécessaire) de manière à obtenir une inéquation-produit ou une inéquation-quotient ;
- résoudre l'inéquation-produit ainsi obtenue à l'aide d'un **tableau de signes**.

Exercice 1.

D'après l'énoncé, le nombre d'élèves s'obtient comme $40x + 11$ d'après la première possibilité, et comme $43x - 1$ d'après la deuxième. Or le nombre d'élèves à faire voyager est le même, d'où l'équation

$$40x + 11 = 43x - 1$$

On résout :

$$40x - 43x = -1 - 11$$

$$-3x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-3}$$

$$x = 4$$

Il y a donc 4 cars. On en déduit qu'il y a $40 \times 4 + 11 = 171$ élèves. Vérification : $43 \times 4 - 1 = 171$ également.

Finalement, il y a 4 cars et 171 élèves.

Exercice 2. $f(x) = \frac{(2x-4)(1-x)}{2(3x+1)}.$

1. Les valeurs à placer dans le tableau de signes sont : 2 (solution de $2x - 4 = 0$), 1 (solution de $x - 1 = 0$) et $-\frac{1}{3}$ (solution de $3x + 1 = 0$).

On obtient :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$2x - 4$	—		—	0	+
$1 - x$	+		+	0	—
$2(3x + 1)$	—	0	+	+	+
$f(x)$	+		—	0	+

2. Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les valeurs de x étant comprises entre $-\frac{1}{3}$ et 1, ou plus grandes que 2 (valeurs limites exclues à chaque fois). Donc :

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{3} ; 1 \right[\cup] 2 ; +\infty [$$

Exercice 3.

(a) $(5x - 1)(2 - 3x) \geq 0$

Les valeurs à placer dans le tableau de signes sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{3}$. On obtient :

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$5x - 1$	—	0	+	+
$2 - 3x$	+	+	0	—
$(5x - 1)(2 - 3x)$	—	0	+	0

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{5} ; \frac{2}{3} \right]$$

(b) $\frac{3}{4x+1} - 1 > 0$

Il faut d'abord mettre l'inéquation sous forme d'une inéquation-quotient en mettant le membre de gauche au même dénominateur.

$$\frac{3 - (4x + 1)}{4x + 1} > 0$$

$$\frac{3 - 4x - 1}{4x + 1} > 0$$

$$\frac{2 - 4x}{4x + 1} > 0$$

On peut maintenant résoudre cette inéquation par un tableau de signes. Les valeurs à placer dans le tableau de signes sont $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. On obtient :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2 - 4x$	+		+	0
$4x + 1$	—	0	+	+
$\frac{2-4x}{4x+1}$	—		+	0

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right[$$

(c) $(x + 3)^2 > (2x - 1)^2$

On applique dans l'ordre les trois étapes de la question de cours pour se ramener à une inéquation-produit à second membre nul. On factorise en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2$.

$$(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 > 0$$

$$(x + 3 - 2x + 1)(x + 3 + 2x - 1) > 0$$

$$(-x + 4)(3x + 2) > 0$$

Les valeurs à placer dans le tableau de signes sont 4 et $-\frac{2}{3}$. On obtient :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	4	$+\infty$
$-x+4$	$+$		$+$	$-$
$3x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$(-x+4)(3x+2)$	$-$	0	$+$	$-$

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{2}{3} ; 4 \right[$$

(d) $9 - x^2 + (3 - x)(2x + 6) \leq 0$

On factorise le membre de gauche.

$$(3 - x)(3 + x) + (3 - x)(2x + 6) \leq 0$$

$$(3 - x)[3 + x + 2x + 6] \leq 0$$

$$(3 - x)(3x + 9) \leq 0$$

$$3(3 - x)(x + 3) \leq 0$$

Les valeurs à placer dans le tableau de signes sont 3 et -3 . On obtient :

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$3 - x$	$+$		$+$	$-$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$(3 - x)(x + 3)$	$-$	0	$+$	$-$
$3(3 - x)(x + 3)$	$-$	0	$+$	$-$

$$\mathcal{S} =] -\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$$

Exercice 4.

1. L'inéquation est bien définie lorsque $5x - 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$.

$$\text{Or, } 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5},$$

et $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, donc les valeurs interdites sont -2 et $\frac{1}{5}$.

$$\text{Donc } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -2 ; \frac{1}{5} \right\} = \left] -\infty ; -2 \right[\cup \left] -2 ; \frac{1}{5} \right[\cup \left] \frac{1}{5} ; +\infty \right[.$$

2. On applique les trois étapes de la question de cours et effectuant une mise au même dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5x-1} - \frac{1}{x+2} &\leq 0 \\ \frac{(x+2) - (5x-1)}{(5x-1)(x+2)} &\leq 0 \\ \frac{-4x+3}{(5x-1)(x+2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

3. On peut alors résoudre l'inéquation en faisant un tableau de signes. Les valeurs à placer dans le tableau sont $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ et -2 .

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$-4x+3$	$+$		$+$	$+$	$-$
$5x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-4x+3}{(5x-1)(x+2)}$	$+$		$-$	$+$	$-$

$$\mathcal{S} = \left] -2 ; \frac{1}{5} \right[\cup \left[\frac{3}{4} ; +\infty \right[$$

-2 et $\frac{1}{5}$ sont exclus car ce sont des valeurs interdites, $\frac{3}{4}$ est inclus car le quotient doit être positif *ou nul*.