

**Objectif :** Montrer que le réel  $\sqrt{2}$  n'appartient pas à l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers. On dit alors que  $\sqrt{2}$  est *irrationnel*.

### Résultat préliminaire

Il s'agit montrer que si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est forcément pair.

1. Soit  $n$  un entier relatif. Développer  $(2n + 1)^2$ .
2. Considérons  $p$  un nombre impair. On peut l'écrire sous la forme  $p = 2n + 1$  avec  $n$  un entier relatif. Montrer que  $p^2$  est un nombre impair.
3. Soit  $q$  un nombre dont le carré est pair. Pourquoi  $q$  ne peut-il pas être impair ?
4. Conclure.

### Cœur du problème

On raisonne par l'absurde, en supposant que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel. On va montrer que cela aboutit à une contradiction.

1. On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel. Expliquer pourquoi on peut écrire  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux (c'est-à-dire que  $a$  et  $b$  n'ont aucun diviseur commun).
2. Montrer qu'on a l'égalité  $a^2 = 2b^2$ .
3. En déduire que  $a^2$  est pair, puis que  $a$  est pair.
4. Justifier qu'on peut écrire  $a = 2k$  avec  $k$  entier.
5. En remplaçant dans l'égalité  $a^2 = 2b^2$ , montrer alors que  $b^2$  est pair.
6. Que peut-on en conclure sur  $b$  ? Montrer que ce résultat est en contradiction avec un résultat précédemment obtenu. Conclure.

L'hypothèse selon laquelle  $\sqrt{2}$  est rationnel conduit, selon une suite de raisonnements logiques, à une contradiction. C'est donc que cette hypothèse était fautive. En conclusion,  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

**Objectif :** Montrer que le réel  $\sqrt{2}$  n'appartient pas à l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers. On dit alors que  $\sqrt{2}$  est *irrationnel*.

### Résultat préliminaire

Il s'agit montrer que si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est forcément pair.

1. Soit  $n$  un entier relatif. Développer  $(2n + 1)^2$ .
2. Considérons  $p$  un nombre impair. On peut l'écrire sous la forme  $p = 2n + 1$  avec  $n$  un entier relatif. Montrer que  $p^2$  est un nombre impair.
3. Soit  $q$  un nombre dont le carré est pair. Pourquoi  $q$  ne peut-il pas être impair ?
4. Conclure.

### Cœur du problème

On raisonne par l'absurde, en supposant que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel. On va montrer que cela aboutit à une contradiction.

1. On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel. Expliquer pourquoi on peut écrire  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux (c'est-à-dire que  $a$  et  $b$  n'ont aucun diviseur commun).
2. Montrer qu'on a l'égalité  $a^2 = 2b^2$ .
3. En déduire que  $a^2$  est pair, puis que  $a$  est pair.
4. Justifier qu'on peut écrire  $a = 2k$  avec  $k$  entier.
5. En remplaçant dans l'égalité  $a^2 = 2b^2$ , montrer alors que  $b^2$  est pair.
6. Que peut-on en conclure sur  $b$  ? Montrer que ce résultat est en contradiction avec un résultat précédemment obtenu. Conclure.

L'hypothèse selon laquelle  $\sqrt{2}$  est rationnel conduit, selon une suite de raisonnements logiques, à une contradiction. C'est donc que cette hypothèse était fautive. En conclusion,  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.