

Résultat préliminaire

1. On développe : $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.
2. On calcule : $p^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Or, $4n^2$ est un nombre pair, puisqu'il est multiple de 4. De même, $4n$ est également un nombre pair. En revanche, 1 est impair, donc la somme $4n^2 + 4n + 1$ est impaire. Donc, p^2 est impair.
3. Si q était impair, alors d'après la question précédente, q s'écrirait $q = 2n + 1$ avec n entier relatif, et on obtiendrait que q^2 est impair. Or, d'après l'énoncé, q^2 est pair, ce qui est incompatible avec q^2 impair. Donc q est forcément pair.
4. La question 3 se traduit exactement par : si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre lui-même est pair.

Cœur du problème

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Comme tout rationnel, ce nombre peut alors s'écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a entier relatif, et b entier naturel non nul. Si les entiers a et b ont des facteurs en commun, on simplifie le numérateur et le dénominateur par tous les facteurs communs de a et de b , jusqu'à ce que la fraction obtenue soit irréductible. Alors, a et b n'ont plus aucun diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux.
2. Par hypothèse, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On réécrit cette égalité $a = b\sqrt{2}$, puis on élève au carré. On obtient $a^2 = (b\sqrt{2})^2$, donc $a^2 = 2b^2$.
3. a^2 s'écrit $2b^2$, qui est un nombre pair puisque b est un entier. Donc a^2 est pair. D'après le résultat préliminaire démontré ci-dessus, cela entraîne que a lui-même est pair.
4. Comme a est pair, on peut écrire $a = 2k$ avec k entier.
5. On remplace dans l'égalité $a^2 = 2b^2$. On obtient $(2k)^2 = 2b^2$, puis $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant les deux membres de l'égalité par 2, on a $2k^2 = b^2$. Ainsi, b^2 s'écrit comme $2k^2$, qui est un nombre pair puisque k est un entier.
6. On applique à nouveau le résultat préliminaire. Comme b^2 est pair, on obtient que b lui-même est pair.

Or, on a déjà montré que a est pair. Autrement dit, a et b sont tous les deux pairs, donc ont un diviseur commun qui est 2. Cela est impossible, puisque d'après la question 1, a et b sont premiers entre eux.

En ayant fait l'hypothèse que $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, on aboutit à une situation impossible (« absurde ») : cela signifie que l'hypothèse faite était fausse. Autrement dit, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

NB : Les nombres réels qui ne sont pas des rationnels sont appelés « irrationnels ».

Résultat préliminaire

1. On développe : $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.
2. On calcule : $p^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Or, $4n^2$ est un nombre pair, puisqu'il est multiple de 4. De même, $4n$ est également un nombre pair. En revanche, 1 est impair, donc la somme $4n^2 + 4n + 1$ est impaire. Donc, p^2 est impair.
3. Si q était impair, alors d'après la question précédente, q s'écrirait $q = 2n + 1$ avec n entier relatif, et on obtiendrait que q^2 est impair. Or, d'après l'énoncé, q^2 est pair, ce qui est incompatible avec q^2 impair. Donc q est forcément pair.
4. La question 3 se traduit exactement par : si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre lui-même est pair.

Cœur du problème

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Comme tout rationnel, ce nombre peut alors s'écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a entier relatif, et b entier naturel non nul. Si les entiers a et b ont des facteurs en commun, on simplifie le numérateur et le dénominateur par tous les facteurs communs de a et de b , jusqu'à ce que la fraction obtenue soit irréductible. Alors, a et b n'ont plus aucun diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux.
2. Par hypothèse, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On réécrit cette égalité $a = b\sqrt{2}$, puis on élève au carré. On obtient $a^2 = (b\sqrt{2})^2$, donc $a^2 = 2b^2$.
3. a^2 s'écrit $2b^2$, qui est un nombre pair puisque b est un entier. Donc a^2 est pair. D'après le résultat préliminaire démontré ci-dessus, cela entraîne que a lui-même est pair.
4. Comme a est pair, on peut écrire $a = 2k$ avec k entier.
5. On remplace dans l'égalité $a^2 = 2b^2$. On obtient $(2k)^2 = 2b^2$, puis $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant les deux membres de l'égalité par 2, on a $2k^2 = b^2$. Ainsi, b^2 s'écrit comme $2k^2$, qui est un nombre pair puisque k est un entier.
6. On applique à nouveau le résultat préliminaire. Comme b^2 est pair, on obtient que b lui-même est pair.

Or, on a déjà montré que a est pair. Autrement dit, a et b sont tous les deux pairs, donc ont un diviseur commun qui est 2. Cela est impossible, puisque d'après la question 1, a et b sont premiers entre eux.

En ayant fait l'hypothèse que $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, on aboutit à une situation impossible (« absurde ») : cela signifie que l'hypothèse faite était fausse. Autrement dit, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

NB : Les nombres réels qui ne sont pas des rationnels sont appelés « irrationnels ».