

## Résultat préliminaire

1. On développe :  $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ .
2. On calcule :  $p^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ . Or,  $4n^2$  est un nombre pair, puisqu'il est multiple de 4. De même,  $4n$  est également un nombre pair. En revanche, 1 est impair, donc la somme  $4n^2 + 4n + 1$  est impaire. Donc,  $p^2$  est impair.
3. Si  $q$  était impair, alors d'après la question précédente,  $q$  s'écrirait  $q = 2n + 1$  avec  $n$  entier relatif, et on obtiendrait que  $q^2$  est impair. Or, d'après l'énoncé,  $q^2$  est pair, ce qui est incompatible avec  $q^2$  impair. Donc  $q$  est forcément pair.
4. La question 3 se traduit exactement par : si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre lui-même est pair.

## Cœur du problème

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel. Comme tout rationnel, ce nombre peut alors s'écrire  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  entier relatif, et  $b$  entier naturel non nul. Si les entiers  $a$  et  $b$  ont des facteurs en commun, on simplifie le numérateur et le dénominateur par tous les facteurs communs de  $a$  et de  $b$ , jusqu'à ce que la fraction obtenue soit irréductible. Alors,  $a$  et  $b$  n'ont plus aucun diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux.
2. Par hypothèse,  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . On réécrit cette égalité  $a = b\sqrt{2}$ , puis on élève au carré. On obtient  $a^2 = (b\sqrt{2})^2$ , donc  $a^2 = 2b^2$ .
3.  $a^2$  s'écrit  $2b^2$ , qui est un nombre pair puisque  $b$  est un entier. Donc  $a^2$  est pair. D'après le résultat préliminaire démontré ci-dessus, cela entraîne que  $a$  lui-même est pair.
4. Comme  $a$  est pair, on peut écrire  $a = 2k$  avec  $k$  entier.
5. On remplace dans l'égalité  $a^2 = 2b^2$ . On obtient  $(2k)^2 = 2b^2$ , puis  $4k^2 = 2b^2$ . En simplifiant les deux membres de l'égalité par 2, on a  $2k^2 = b^2$ . Ainsi,  $b^2$  s'écrit comme  $2k^2$ , qui est un nombre pair puisque  $k$  est un entier.
6. On applique à nouveau le résultat préliminaire. Comme  $b^2$  est pair, on obtient que  $b$  lui-même est pair.

Or, on a déjà montré que  $a$  est pair. Autrement dit,  $a$  et  $b$  sont tous les deux pairs, donc ont un diviseur commun qui est 2. Cela est impossible, puisque d'après la question 1,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

En ayant fait l'hypothèse que  $\sqrt{2}$  était un nombre rationnel, on aboutit à une situation impossible (« absurde ») : cela signifie que l'hypothèse faite était fausse. Autrement dit,  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

NB : Les nombres réels qui ne sont pas des rationnels sont appelés « irrationnels ».

## Résultat préliminaire

1. On développe :  $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ .
2. On calcule :  $p^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ . Or,  $4n^2$  est un nombre pair, puisqu'il est multiple de 4. De même,  $4n$  est également un nombre pair. En revanche, 1 est impair, donc la somme  $4n^2 + 4n + 1$  est impaire. Donc,  $p^2$  est impair.
3. Si  $q$  était impair, alors d'après la question précédente,  $q$  s'écrirait  $q = 2n + 1$  avec  $n$  entier relatif, et on obtiendrait que  $q^2$  est impair. Or, d'après l'énoncé,  $q^2$  est pair, ce qui est incompatible avec  $q^2$  impair. Donc  $q$  est forcément pair.
4. La question 3 se traduit exactement par : si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre lui-même est pair.

## Cœur du problème

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel. Comme tout rationnel, ce nombre peut alors s'écrire  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  entier relatif, et  $b$  entier naturel non nul. Si les entiers  $a$  et  $b$  ont des facteurs en commun, on simplifie le numérateur et le dénominateur par tous les facteurs communs de  $a$  et de  $b$ , jusqu'à ce que la fraction obtenue soit irréductible. Alors,  $a$  et  $b$  n'ont plus aucun diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux.
2. Par hypothèse,  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . On réécrit cette égalité  $a = b\sqrt{2}$ , puis on élève au carré. On obtient  $a^2 = (b\sqrt{2})^2$ , donc  $a^2 = 2b^2$ .
3.  $a^2$  s'écrit  $2b^2$ , qui est un nombre pair puisque  $b$  est un entier. Donc  $a^2$  est pair. D'après le résultat préliminaire démontré ci-dessus, cela entraîne que  $a$  lui-même est pair.
4. Comme  $a$  est pair, on peut écrire  $a = 2k$  avec  $k$  entier.
5. On remplace dans l'égalité  $a^2 = 2b^2$ . On obtient  $(2k)^2 = 2b^2$ , puis  $4k^2 = 2b^2$ . En simplifiant les deux membres de l'égalité par 2, on a  $2k^2 = b^2$ . Ainsi,  $b^2$  s'écrit comme  $2k^2$ , qui est un nombre pair puisque  $k$  est un entier.
6. On applique à nouveau le résultat préliminaire. Comme  $b^2$  est pair, on obtient que  $b$  lui-même est pair.

Or, on a déjà montré que  $a$  est pair. Autrement dit,  $a$  et  $b$  sont tous les deux pairs, donc ont un diviseur commun qui est 2. Cela est impossible, puisque d'après la question 1,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

En ayant fait l'hypothèse que  $\sqrt{2}$  était un nombre rationnel, on aboutit à une situation impossible (« absurde ») : cela signifie que l'hypothèse faite était fausse. Autrement dit,  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

NB : Les nombres réels qui ne sont pas des rationnels sont appelés « irrationnels ».