

Model-checking des MSO-formules sur des structures infinies

Basile Morcrette
sous la direction de
Wolfgang Thomas
Lehrstuhl für Informatik VII
RWTH Aachen

5 juin - 8 août 2008

Le contexte général

Le contexte général est le problème du Model-checking pour des formules de la logique monadique du second ordre (MSO) sur des structures infinies (graphes). De nombreux travaux ont déjà été réalisés dans ce domaine. Les premiers résultats de décidabilité sont dus à Büchi et Rabin dans les années 1960, qui ont montré que les MSO-théories des mots infinis et des arbres infinis sont décidables.

Les recherches actuelles voudraient étendre ces résultats pour des structures plus complexes. Didier Caucal dans [Cau02] et [Cau03] a décrit des transformations sur les structures qui préservent la décidabilité de la MSO-théorie (unfoldings et substitutions rationnelles inverses). En alternant ces deux transformations, on obtient une hiérarchie stricte, la hiérarchie de Caucal. On ne sait caractériser explicitement que les premiers niveaux de la hiérarchie. Carayol & Wöhrle dans [CW03] ont montré que l'on obtient la même hiérarchie en utilisant deux autres transformations : les unfoldings et les MSO-interprétations.

Le travail effectué durant ce stage pose la question de la décidabilité des théories de structures limites, i.e. obtenues après une infinité de transformations.

Le problème étudié

Une fois la hiérarchie posée, il est légitime de se demander ce qu'il en est au niveau ω de la hiérarchie. Peut-on donner des informations sur la décidabilité des théories des structures limites ? Il faut alors définir des suites de graphes dans la hiérarchie ainsi que leur limite. Cela permettrait de donner une alternative pour prouver qu'une structure infinie a une MSO-théorie décidable, en montrant qu'elle est limite d'une suite de structures décidables. Cela amène également à découvrir de nouvelles structures ayant une MSO-théorie décidable.

La contribution proposée

La première étape est de décrire et définir une suite de structures infinies. Une fois cette théorie mise en place, la difficulté est de trouver les conditions nécessaires pour que la limite ait une MSO-théorie décidable. Il a fallu travailler sur des exemples afin de comprendre les problèmes que posent la limite. La recherche d'exemples et de contre-exemples a été décisive dans le déroulement du stage.

On a ainsi pu limiter notre étude aux suites de structures construites de façon itérative. En

développant l'idée de Wolfgang Thomas dans [Tho08], on a défini et étudié deux schémas utilisant uniquement les unfoldings et les MSO-interprétations : un schéma linéaire et un schéma arborescent.

Les arguments en faveur de sa validité

L'étude des propriétés limites d'une suite de structures est difficile car dans le cas général, les propriétés de la suite ne sont plus validées par la limite. Rechercher à préserver la décidabilité de la MSO-théorie impose de nombreuses restrictions.

Concernant nos deux schémas, on a montré que le schéma arborescent était trop expressif, car il pouvait donner des limites ayant des MSO-théories indécidables. Pour le schéma linéaire, on a montré qu'il était plus faible que le schéma arborescent. De plus, grâce à lui, on a pu construire effectivement une suite de graphes qui est strictement croissante dans la hiérarchie de Caucal et dont la limite a une MSO-théorie décidable. Il permet de construire des structures situées dans n'importe quel niveau de la hiérarchie, et de trouver de nouvelles structures ayant des MSO-théories décidables et se situant hors hiérarchie.

Mais ceci n'est pas général. En effet, en partant d'une structure ayant une MSO-théorie décidable, on a pu grâce au schéma linéaire obtenir une limite simulant l'exécution d'une machine de Turing donc dont la MSO-théorie est indécidable.

Le bilan et les perspectives

On a travaillé sur des structures infinies (graphes) qui sont des structures très générales dans lesquelles nombreux problèmes se modélisent. On a établi des premiers résultats et des premières observations ainsi que des exemples qui justifient l'intérêt porté aux structures limites de suites construites par schéma linéaire.

Malgré ces premières observations encourageantes, il faudrait étudier l'influence du choix de la structure de départ dans la construction par le schéma linéaire par rapport à la décidabilité de la MSO-théorie de la limite de la suite.

Références

- [Cau02] D. Caucal. On infinite terms having a decidable monadic theory. *MFCS*, pages 165–176, 2002.
- [Cau03] D. Caucal. On infinite transition graphs having a decidable monadic theory. *Theoretical Computer Science*, 290(1) :79–115, 2003.
- [CW03] A. Carayol and S. Wöhrle. The Caucal hierarchy of infinite graphs in terms of logic and higher-order pushdown automata. *FST TCS 2003 : Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science., LNCS*, 2914 :112–123, 2003.
- [Tho08] W. Thomas. Model Transformations in Decidability Proofs for Monadic Theories. *Computer Science Logic*, 2008.

Model-checking des MSO-formules sur des structures infinies

Basile MORCRETTE
sous la direction de
Wolfgang THOMAS
Lehrstuhl für Informatik VII
RWTH Aachen

5 juin - 8 août 2008

Table des matières

1	Préliminaires	2
1.1	Structures infinies - Notations	2
1.2	MSO-Logic	3
1.2.1	FO-Logic	3
1.2.2	MSO-Logic	3
1.3	Problème du Model-checking	4
1.4	Décidabilité et indécidabilité - Exemples	5
1.5	Méthode des types	6
2	Transformations de graphes	7
2.1	Unfolding d'un graphe	7
2.2	MSO-interprétation	8
3	La hiérarchie de Caucal	10
3.1	Définition et exemples	10
3.2	Propriétés de la hiérarchie	10
3.2.1	Arbre d'une fonction	10
3.2.2	Théories avec successeur et prédicat	10
4	Suites de graphes infinis	12
4.1	Limites et croissance dans la hiérarchie	12
4.2	Suites définies par un schéma Unfolding-Interpretation	13
4.2.1	Schéma non linéaire, arborescent	13
4.2.2	Schéma linéaire	16

Introduction

Les premiers travaux effectués sur les théories monadiques du second ordre (MSO) utilisant la théorie des automates sont dus à Büchi et Rabin dans les années 1960. Que ce soit sur les mots infinis ou les arbres infinis, ils ont montré que les MSO-théories de ces structures étaient décidables. Pour cela, ils ont transformé les formules logiques en automates finis.

Les recherches menées depuis visent à obtenir de nouvelles structures ayant une MSO-théorie décidable. Pour cela, Didier Caucal a adopté un point de vue plus structurel : les structures relationnelles étudiées sont des graphes étiquetés et certaines transformations sur ces graphes permettent de conserver la propriété de décidabilité de leur MSO-théorie. Didier Caucal a défini une hiérarchie de graphes en utilisant en alternance deux types de transformations de graphes : les unfoldings et les substitutions rationnelles inverses ([Cau02]).

Dans notre étude, nous adoptons l'approche d'Arnaud Carayol et Stefan Wöhrle [CW03], où l'on définit la hiérarchie de Caucal avec les transformations suivantes : les unfoldings et les MSO-interprétations. Dans *CSL 2008* [Tho08], Wolfgang Thomas propose de construire des suites en utilisant ces deux transformations : des schémas Unfolding/MSO-interprétation.

Notre travail s'intéresse aux suites de graphes dans cette hiérarchie ainsi qu'aux propriétés de leur limite. Dans les sections 1 et 2, on introduit les notions de graphes infinis, MSO-logique et Model-Checking problem, unfolding et MSO-interprétation. Dans la section 3, on définit la hiérarchie de Caucal, puis on énonce quelques propriétés sur la hiérarchie en utilisant les arbres de fonctions. Dans la section 4, on définit les suites de graphes, les notions de limite et de croissance et l'on étudie deux types de suites : les suites construites par un schéma Unfolding/MSO-interprétation linéaire, et celles construites par un schéma Unfolding/MSO-interprétation arborescent, non linéaire. Une discussion est faite sur la décidabilité des MSO-théories des structures limites obtenues dans les deux cas.

1 Préliminaires

1.1 Structures infinies - Notations

Les premières structures infinies étudiées dans le contexte des théories monadiques ont été les mots et les arbres. On généralise ces notions grâce aux graphes infinis. Soit G un graphe :

$$G = \langle V, (E_a)_{a \in \Sigma}, (P_b)_{b \in \Gamma} \rangle$$

V est l'ensemble des sommets, E_a est une relation binaire sur les sommets $E_a \subset V \times V$. $E_a(x, y)$ représente une arête de x à y étiqueté par a . E_a est

l'ensemble de ces arêtes. P_b est un prédicat unaire, représentant les sommets étiquetés par b .

On se place donc dans le contexte des graphes. Un graphe est dit *fini* si V est fini; *infini* sinon. En général, V sera un ensemble dénombrable $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$. On considère des graphes n'ayant pas de sommet isolé, i.e. chaque sommet possède au moins une arête entrante ou sortante.

On peut ainsi représenter les structures des nombres entiers avec successeur et prédicat $(\mathbb{N}, Succ, P)$, où $Succ = \{(n, n + 1) \mid n \geq 0\}$ et $P \subset \mathbb{N}$.

Cette structure englobe aussi des structures classiques telles que les mots et les arbres. En effet, un mot $w = a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$ sur l'alphabet Σ peut être défini par $(\mathbb{N}, Succ, (P_a)_{a \in \Sigma})$, où $Succ = \{(n, n + 1) \mid n \geq 0\}$, et $P_a = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i = a\}$.

L'arbre binaire infini Δ_2 sur $\Sigma = \{a, b\}$ est représenté par la structure $(\{0, 1\}^*, E_a, E_b)$, où $E_a = \{(w, w0) \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, $E_b = \{(w, w1) \mid w \in \{0, 1\}^*\}$. On obtient la famille des arbres binaires infinis étiquetés en ajoutant à la structure Δ_2 un ensemble de prédicats $(P_c)_{c \in \Gamma}$, où P_c est l'ensemble des sommets étiquetés par c .

1.2 Logique

1.2.1 Logique du premier ordre

Une formule logique du premier ordre (FO-formule) est définie inductivement à partir d'atomes.

Tout d'abord, les variables du premier ordre sont notées x, y, z, \dots . Dans notre cas, les formules sont interprétées dans des graphes, les variables représentent des sommets. Les atomes sont : $E_a(x, y)$, $P_b(x)$ pour tout $a \in \Sigma$ et pour tout $b \in \Gamma$.

Les atomes sont des formules du premier ordre. Si φ et ψ sont des formules du premier ordre, alors $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg \varphi$ le sont aussi; $\forall x \varphi$ et $\exists x \varphi$ également.

1.2.2 Logique du 2nd ordre

Les formules du second ordre (MSO-formules) se construisent de la même façon que précédemment. On ajoute des variables monadiques du second ordre X, Y, Z, \dots qui représentent des ensembles de sommets. On a un atome supplémentaire : $X(x)$ (signifiant x appartient à X); et on autorise les quan-

tificateurs sur les variables du second ordre : $\forall X$ et $\exists X$.

Exemple 1.

$$\varphi(x, y) = \forall X (X(x) \wedge (\forall z_1 z_2 (X(z_1) \wedge E_a(z_1, z_2)) \Rightarrow X(z_2)) \Rightarrow X(y))$$

$\varphi(x, y)$ est vérifiée s'il existe un chemin étiqueté par un mot dans a^* entre x et y .

On peut exprimer les variables du premier ordre dans la logique monadique du second ordre (MSO). Cela est utile pour des raisons techniques. Pour cela il suffit de changer les atomes :

$$Sing(X), X \subset Y, E_a(X, Y), P_b(X) \tag{1}$$

$Sing(X)$ signifie que X est un singleton, $E_a(X, Y)$ et $P_b(X)$ n'ont de sens que si X et Y sont des singletons.

Exemple 2. La traduction de la formule de l'exemple précédent est :

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) = \forall T (Sing(X) \wedge Sing(Y) \wedge X \subset T \wedge (\forall Z_1 Z_2 (Sing(Z_1) \wedge Sing(Z_2)) \\ \wedge (Z_1 \subset T \wedge E_a(Z_1, Z_2)) \Rightarrow Z_2 \subset T) \Rightarrow Y \subset T) \end{aligned}$$

Remarque. Étant donné un langage régulier L , on peut créer une formule $\psi_L(x, y)$ telle que $\psi_L(x, y)$ est vérifiée ssi il existe un chemin étiqueté par $w \in L$ entre x et y .

Soit φ une formule logique MSO sans variables du premier ordre. Les variables apparaissant dans φ non quantifiées sont dite *libres*. Si X_1, \dots, X_n sont les variables libres de φ , on notera $\varphi(X_1, \dots, X_n)$.

Une MSO-formule sans variables libres est dite *close*.

Sans perte de généralité, pour les exemples, on regarde uniquement des structures avec des prédicats binaires.

Si φ est une formule close qui est vraie dans une structure $\mathcal{A} = (V_{\mathcal{A}}, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma})$, on note $\mathcal{A} \models \varphi$.

Si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule vraie dans \mathcal{A} lorsque l'on interprète x_i par $a_i \in V_{\mathcal{A}}$, on note $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

1.3 Problème du Model-checking

Définition (Modèle d'une formule φ). Soit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ une formule de la logique MSO construite sur une structure \mathcal{A} , où x_1, \dots, x_n sont les variables libres de φ .

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in V_{\mathcal{A}}^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$$

$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$ est la relation définie dans la structure \mathcal{A} par la MSO-formule φ .

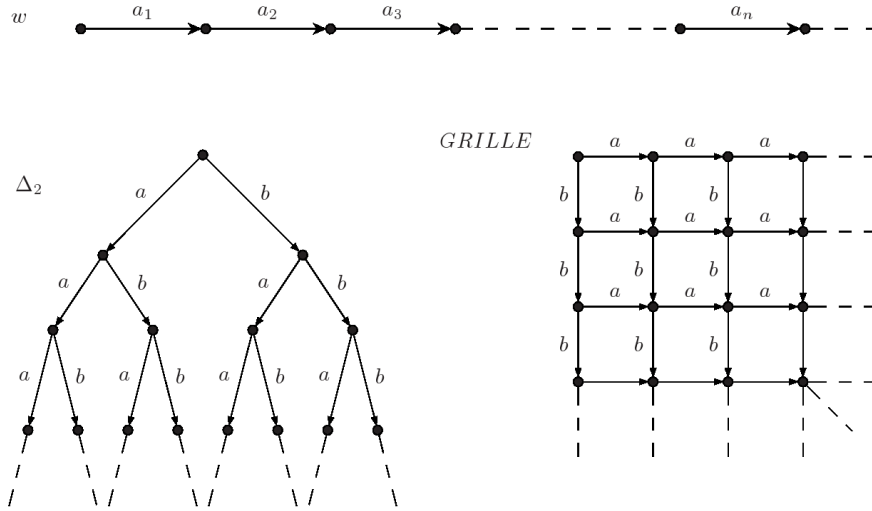


FIG. 1 – Mot infini, arbre binaire infini, grille

Le problème du Model-checking s'énonce comme suit :
 Étant donné une structure \mathcal{G} (graphe) et une MSO-formule close φ , a-t-on $\mathcal{G} \models \varphi$? i.e. la formule close φ est-elle vraie dans la structure \mathcal{G} ?

Si ce problème est décidable, on dit que \mathcal{G} a un MSO-model-checking problème décidable. On appelle *théorie monadique de \mathcal{G}* , notée $\text{MSO-Th}(\mathcal{G})$, l'ensemble des MSO-formules closes qui sont satisfaites dans \mathcal{G} . Si le Model-checking problème est décidable, on dit aussi que $\text{MSO-Th}(\mathcal{G})$ est décidable.

1.4 Décidabilité et indécidabilité - Exemples

- Prenons le graphe représentant un mot infini w . Ce graphe est une branche infinie (fig. 1). La structure associée est $(\mathbb{N}, \text{Succ})$. La MSO-théorie de cette structure est appelé $S1S$.

Théorème 1 (Büchi). *$S1S$ est décidable.*

- Prenons maintenant l'arbre binaire infini Δ_2 . Sa structure est $(\{0, 1\}^*, E_a, E_b)$ et sa théorie est notée $S2S$.

Théorème 2 (Rabin's tree theorem). *$S2S$ est décidable.*

- Voyons un exemple de théorie indécidable : la théorie monadique de la grille.

$$\text{Grille} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, E_a, E_b)$$

$$E_a = \{ ((i, j), (i + 1, j)) \mid i \geq 0, j \geq 0 \}$$

$$E_b = \{ ((i, j), (i, j + 1)) \mid i \geq 0, j \geq 0 \}$$

Sa MSO-théorie est indécidable : en effet, on peut réduire le problème de l'arrêt des machines de Turing.

Les résultats de décidabilité ci-dessus sont obtenus par une méthode classique pour la résolution de problèmes liés aux théories monadiques : il s'agit de réduire les MSO-formules vers les automates finis. On obtient ainsi des constructions effectives et des résultats de décidabilité. On trouvera plus de détails sur les logiques et les théories décidables dans [Tho97b].

1.5 Méthode des types

Il existe une autre façon de traiter les problèmes liés à la décidabilité des théories monadiques, cette fois sans passer par les automates, mais en travaillant directement sur les formules. Il s'agit de la méthode des types.

Soit $\varphi(X_1, \dots, X_m)$ une MSO-formule. On peut écrire cette formule sous forme normale préfixe, i.e. sous la forme

$$Qu_1Y_1Qu_2Y_2 \dots Qu_nY_n\psi(\overline{X}, Y_1, \dots, Y_n)$$

où ψ est une MSO-formule sans quantificateurs construite avec les atomes (1), Qu_i est soit \forall soit \exists en alternance, \overline{X} signifie X_1, \dots, X_m . Une telle formule est appelée *n-formule* : c'est une formule de profondeur de quantificateur n . L'ensemble des *n-formules* satisfaites dans une structure \mathcal{A} est appelé *n-théorie* de \mathcal{A} .

Définissons les *n-types* :

Soit n et m deux entiers. Décrivons tous les *n-types* possibles avec m paramètres. Soit $Atom_m$ l'ensemble des formules atomiques sur les variables X_1, \dots, X_m .

$$t^0(m) := \mathcal{P}(Atom_m)$$

$$t^{n+1}(m) := \mathcal{P}(t^n(m + 1))$$

On associe maintenant à un entier n et une structure \mathcal{A} un élément de $t^n(m)$, appelé *n-type* $t^n(\mathcal{A})$ et défini comme suit :

$$t^0(\mathcal{A}) := \{ \varphi(\overline{X}) \mid \varphi(\overline{X}) \text{ est un MSO-atome et } \mathcal{A} \models \varphi(\overline{X}) \}$$

$$t^{n+1}(\mathcal{A}) := \{ t^n(\mathcal{A}, Q) \mid Q \subset V_{\mathcal{A}} \}$$

Remarque. Pour tous entiers m et n , l'ensemble $t^n(m)$ est fini. En effet, pour le construire, on part d'un ensemble fini $Atom_m$, et on prend l'ensemble des parties un nombre fini de fois, ce qui donne finalement un ensemble fini. De

plus, $t^n(\mathcal{A})$ est un sous-ensemble de $t^n(m)$, où m est le nombre de prédicats dans \mathcal{A} . Le nombre de n -types est donc fini.

Lemme 1 (cf. [Tho97a]). *MSO- $Th(\mathcal{A})$ est décidable ssi la fonction $f_{\mathcal{A}} : n \mapsto t^n(\mathcal{A})$ est calculable.*

Décidabilité et indécidabilité - Exemples Pour les théories $(\mathbb{N}, Succ, P)$, la décidabilité de la théorie dépend du choix du prédicat P . Les résultats suivants sont obtenus grâce à la méthode non uniforme des types : (cf. [ER66], [Tho97a], [CT00]) :

Soit r un entier fixé. Si $P = \{ n! \mid n \geq 0 \}$ ou $P = \{ n^r \mid n \geq 0 \}$ ou $P = \{ r^n \mid n \geq 0 \}$, alors la théorie monadique de la structure $(\mathbb{N}, Succ, P)$ est décidable.

Posons $exp_k(n) = 2 \uparrow^k (n)$ avec $2 \uparrow^0 (n) = n$ et $2 \uparrow^{k+1} (n) = 2^{2 \uparrow^k (n)}$. On peut montrer, si $P = \{ exp_k(n) \mid n \geq 0 \}$ pour un k fixé, ou bien si $P = \{ exp_k(n) \mid k \geq 0 \}$ pour un n fixé, la MSO-théorie de $(\mathbb{N}, Succ, P)$ est décidable.

En revanche, si P est l'ensemble des nombres premiers, on ne sait pas actuellement si la MSO-théorie de $(\mathbb{N}, Succ, P)$ est décidable ou non. De plus, on ne sait pas s'il est possible de décrire non-artificiellement un sous-ensemble $P \subset \mathbb{N}$ qui rende la MSO-théorie $(\mathbb{N}, Succ, P)$ indécidable.

2 Opérations sur les structures relationnelles

Objectif On a des graphes (finis ou infinis) dont la MSO-théorie est décidable. On voudrait obtenir d'autres graphes, plus expressifs, plus généraux, ayant eux aussi une MSO-théorie décidable. On va pour cela faire des transformations sur les structures. Il en existe un certain nombre qui préserve la décidabilité, mais on ne s'intéresse qu'à deux types de transformations : les unfoldings et les MSO-interprétations (cf. [Tho03]).

2.1 Unfolding d'un graphe

Définition. Un sommet v d'un graphe \mathcal{G} est dit *MSO-définissable* s'il existe une formule $\varphi(x)$ construite sur la structure \mathcal{G} telle que v est le seul modèle de $\varphi(x)$, i.e. $\varphi^{\mathcal{G}}(x) = \{v\}$.

Définition (Unfolding). Soit un graphe \mathcal{G} et $v \in V_{\mathcal{G}}$ un sommet du graphe. L'unfolding de \mathcal{G} à partir de v est :

$$\text{Unf}(\mathcal{G}, v) = (V_U, E_U)$$

V_U est l'ensemble des chemins finis possibles dans \mathcal{G} partant de v .

$$V_U = \{v_0 a_1 v_1 \dots a_k v_k \mid v_0 \xrightarrow{a_1} v_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} v_k \text{ est un chemin dans } \mathcal{G}\}$$

$$E_a^U = \{(c_1, c_2) \in V_U^2 \mid \exists v \in V_{\mathcal{G}} \text{ t.q. } c_2 = c_1 a v\}$$

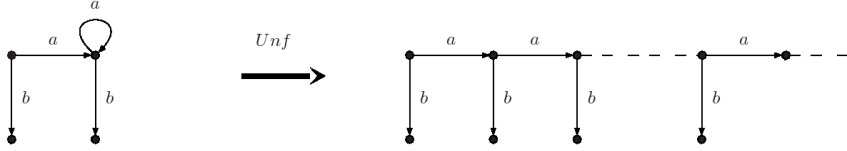


FIG. 2 – Un graphe et son unfolding

Exemple 3. On part d'un graphe fini (cf fig. 2). On définit l'unfolding par le sommet de départ des chemins. Ici, on prend la racine (le sommet en haut à gauche). Le résultat est un arbre infini (cf fig.2).

Remarque. Tout unfolding d'un graphe est un arbre.

Théorème 3 (Muchnik, Courcelle, Walukiewicz, cf.[BB02] [Cau02]).

Si MSO-Th (\mathcal{G}) est décidable et si v est MSO-définissable, alors MSO-Th($Unf(\mathcal{G}, v)$) est décidable.

2.2 MSO-interprétation

Sans perte de généralité, pour les exemples, on ne considère que des structures sans prédicats unaires.

Définition (MSO-interprétation). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux structures relationnelles. Une MSO-interprétation \mathcal{I} de \mathcal{B} dans \mathcal{A} est donnée par des MSO-formules $\delta(x)$ et $(\psi_a(x, y))_{a \in \Sigma}$ telles que :

$$\mathcal{B} \simeq (\delta^{\mathcal{A}}, (\psi_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma})$$

$\delta(x)$ définit le domaine de l'interprétation, $\psi_a(x, y)$ définit les arêtes étiquetées par a .

$$\mathcal{A} = (V^{\mathcal{A}}, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma^{\mathcal{A}}}), \mathcal{B} = (V^{\mathcal{B}}, (E_a^{\mathcal{B}})_{a \in \Sigma^{\mathcal{B}}})$$

$$\delta^{\mathcal{A}}(x) \simeq V^{\mathcal{B}} \text{ et } (\psi_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma} \simeq (E_a^{\mathcal{B}})_{a \in \Sigma^{\mathcal{B}}}$$

$\delta^{\mathcal{A}}$ (resp. $\psi_a^{\mathcal{A}}$) est l'ensemble des modèles de δ (resp. ψ_a) dans la structure \mathcal{A} .

Exemple 4. Prenons le graphe obtenu à la figure 2. Il a pour ensemble d'arêtes E_a et E_b . Décrivons la MSO-interprétation :

- $\psi_a = E_a$, $\psi_b = E_b$ (on ne change pas les arêtes a et b)
- $\psi_c(x, y) = \psi_d(x, y) = \exists z_1 z_2 E_a(z_1, z_2) \wedge E_b(z_1, y) \wedge E_b(z_2, x)$

Le domaine n'étant pas précisé, il s'agit de l'ensemble des sommets. Le résultat de l'interprétation est la figure 3.

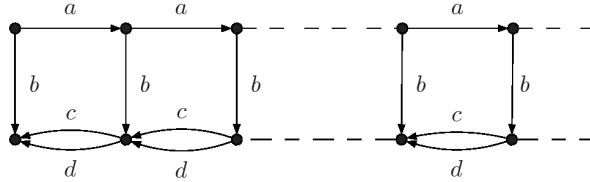


FIG. 3 – Graphe obtenu après une MSO-interprétation du graphe de la figure 2

Théorème 4 (cf. [BB02] [Tho03]). *S'il existe une MSO-interprétation de \mathcal{B} dans \mathcal{A} , et si $\text{MSO-Th}(\mathcal{A})$ est décidable, alors $\text{MSO-Th}(\mathcal{B})$ est décidable.*

Voici maintenant un lemme permettant d'exprimer le n -type d'un unfolding.

Lemme 2 (Unfolding-type). *Soit G un graphe et v un sommet de G . Il existe une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que le n -type de l'unfolding $\text{Unf}(G, v)$, noté $t_n(\text{Unf}(G, v))$, est calculable à partir du $f(n)$ -type de (G, v) .*

Preuve. D'après Muchnik-Walukiewicz ([BB02]), $\text{MSO-Th}(\text{Unf}(G, v))$ est récursive dans $\text{MSO-Th}(G, v)$, i.e. il existe une procédure qui décide pour chaque formule close φ de la question “ $\varphi \in \text{MSO-Th}(\text{Unf}(G, v))$?”, et dans l'exécution de la procédure, les réponses aux questions de la forme “ $\psi_i \in \text{MSO-Th}(G, v)$?” sont données correctement par un oracle.

De plus, pour chaque n -formule φ , il suffit de répondre à un nombre fini de questions faisant intervenir des formules ψ_1, \dots, ψ_r .

Alors, pour déterminer le n -type de $\text{Unf}(G, v)$, on doit vérifier un nombre fini de formules φ , et chacune des formules φ introduit un nombre fini de formules ψ_i . Posons $f(n)$ comme étant le maximum de profondeur de quantificateur des formules ψ_i .

Ainsi, si on connaît le $f(n)$ -type de (G, v) , on peut calculer le n -type de son unfolding. \square

Remarque. Cette preuve est “platonique”. On donne l'existence de $f(n)$ ainsi qu'une façon abstraite de l'obtenir. On pourrait tenter de l'obtenir explicitement.

3 La hiérarchie de Caucal

3.1 Définition et exemples

Partant d'une structure \mathcal{A} ayant une MSO-théorie décidable, Didier Caucal ([Cau02] [Cau03]) proposa d'appliquer en alternance un unfolding et une MSO-interprétation. Cela donne de nouvelles structures dont la MSO-théorie est décidable.

Définition.

$\mathcal{T}_0 =$ arbres finis

$\mathcal{G}_n =$ graphes obtenus par MSO-interprétation d'une structure $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_n$

$\mathcal{T}_{n+1} =$ graphes obtenus par Unfolding d'une structure $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_n$

Exemple 5.

$\mathcal{T}_0 =$ arbres finis

$\mathcal{G}_0 =$ graphes finis

$\mathcal{T}_1 =$ arbres réguliers (qui ont un nombre fini de sous-arbres distincts, non isomorphes)

$\mathcal{G}_1 =$ graphes préfixe-reconnaissables (clôture par ϵ -transitions des pushdown-graphes, graphes de transition des automates à pile)

Le graphe de la figure 3 est dans \mathcal{G}_1 .

3.2 Propriétés de la hiérarchie

3.2.1 Arbre d'une fonction

Définition (arbre d'une fonction f).

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\mathcal{T}_f = (V, E_a, E_b)$

$E_a = \{ ((i, 0), (i + 1, 0)) \mid i \geq 0 \}$

$E_b = \{ ((i, j), (i, j + 1)) \mid i \geq 0 \text{ et } j + 1 \leq f(i) \}$

Remarque. On s'intéresse aux fonctions croissantes, c'est-à-dire des fonctions f telles que $\forall n, f(n + 1) > f(n)$ et donc $f(n) \geq n$. (cf. fig. 4)

3.2.2 Théories avec successeur et prédicat

Faisons le lien entre les arbres de fonctions et les théories avec successeur et prédicat du type $(\mathbb{N}, Succ, P)$.

Proposition 1. Soit $P = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ un sous ensemble de \mathbb{N} , avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. On considère P comme un prédicat (logique) unaire,

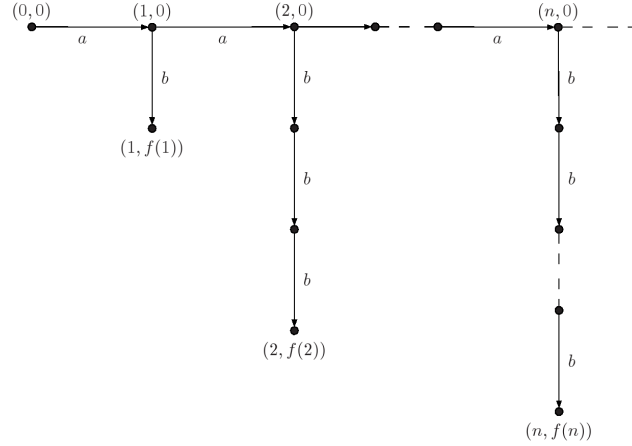


FIG. 4 – Arbre d’une fonction croissante

i.e. $P(x)$ est vrai ssi $x \in P$. Soit f_P la fonction définie sur \mathbb{N} par $f_P(n) = x_n$. Soit \mathcal{T}_P l’arbre de cette fonction. Si $(\mathbb{N}, Succ, P)$ a une MSO-théorie décidable, alors $MSO - Th(\mathcal{T}_P)$ est décidable.

Preuve. Si la théorie $(\mathbb{N}, Succ, P)$ est décidable, notons G le graphe représentant un ordre linéaire : chaque sommet est un entier, les arêtes sont étiquetées par a et correspondent au successeur. Sur G , on représente P en coloriant les sommets dont l’étiquette est dans P . Ce graphe a une MSO-théorie décidable (sans coloriage, le graphe est un arbre régulier, et le coloriage, donné par P , est décidable). On va lui appliquer une MSO-interprétation suivie d’un unfolding. Pour l’interprétation, on ajoute, pour chaque arête a , une arête étiquetée par b dans le sens contraire. On applique l’unfolding à la racine, puis on effectue une seconde MSO-interprétation qui conserve l’ordre linéaire du départ ainsi que les branches étiquetées par b . Ainsi le sommet étiqueté par n possède une branche constituée de n b . Il suffit de sélectionner uniquement les branches ayant pour origine un sommet coloré. On obtient ainsi uniquement les sommets validant P . Ceci est exprimable par une MSO-interprétation. On obtient finalement une structure ayant une théorie décidable, qui n’est autre que l’arbre de la fonction f_P associée au prédicat. \square

Exemple 6. Reprenons la fonction $exp_k(n) = 2 \uparrow^k (n)$.

D’après [CW03], on sait que \mathcal{T}_{exp_k} est une structure appartenant au niveau k de la hiérarchie et pas au niveau $k - 1$.

De plus, définissons $exp_\omega^n(k) = exp_k(n)$.

Considérons le prédicat $Exp = \{2 \uparrow^k (0), k \geq 0\} = \{exp_\omega^0(k), k \geq 0\}$. D’après [CT00], la théorie $(\mathbb{N}, Succ, Exp)$ est décidable. Par la proposition 1,

on a donc la décidabilité de la MSO-théorie de $\mathcal{T}_{exp_\omega^0} = \mathcal{T}_{Exp}$.
Par contre, $\mathcal{T}_{exp_\omega^0}$ n'appartient pas à la hiérarchie [Blu08].

La hiérarchie de Caucal est donc stricte. \mathcal{T}_{exp_k} est un exemple de séparateur. Toutes les structures ayant une théorie décidable ne sont pas dans la hiérarchie ($\mathcal{T}_{exp_\omega^0}$ par exemple).

4 Suites de graphes infinis

4.1 Limites et croissance dans la hiérarchie

Une suite de graphes est donné par $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où G_n est un graphe pour tout n .

$$G_n = (V_n, (E_a^n)_{a \in \Sigma_n}, (P_b^n)_{b \in \Gamma_n})$$

On définit la limite d'une suite, notée G_ω par

$$G_\omega = (V_\omega, (E_a^\omega)_{a \in \Sigma}, (P_b^\omega)_{b \in \Gamma})$$

$$V_\omega = \{v \in \cup_{i \geq 0} V_i \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, v \in V_n\}$$

$$E_a^\omega = \{(u, v) \in V_\omega \times V_\omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, (u, v) \in E_a^n\}$$

$$P_b^\omega = \{v \in V_\omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, v \in P_b^n\}$$

Proposition 2.

$$G_\omega = \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} G_n$$

Preuve.

$$v \in V_\omega \iff \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, v \in V_n$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{N}, v \in \bigcap_{n \geq k} V_n$$

$$\iff v \in \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} V_n$$

De même pour E_a^ω et P_b^ω , pour tout $a \in \Sigma$, $b \in \Gamma$. □

Intuitivement, un élément se retrouve dans la limite s'il apparaît à toutes les étapes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition (suite croissante). Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de graphes infinis. On qualifie cette suite de *croissante* si pour tout n entier, G_n est dans \mathcal{G}_n . La suite est qualifiée de *strictement croissante* si pour tout n , $G_n \in \mathcal{G}_n \setminus \mathcal{G}_{n-1}$. Pour une suite strictement croissante, on se trouve, à chaque étape, dans un niveau strictement supérieur dans la hiérarchie de Caucal.

Mais ces définitions ne suffisent pas pour obtenir des propriétés remarquables sur la limite. En effet, on peut construire des suites de graphes strictement croissantes telles que la limite aie une MSO-théorie décidable ou non, ou encore telles que la limite soit dans la hiérarchie de Caucal ou non.

Exemple 7. Prenons la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ suivante : T_n est l'arbre binaire de hauteur n . La limite de cette suite est l'arbre binaire infini qui a une MSO-théorie décidable (niveau 1 dans la hiérarchie de Caucal).

Prenons maintenant la suite $(G_n)_{n \geq 0}$: G_n est la grille de taille $n \times n$. La limite donne la grille infinie dont la MSO-théorie est indécidable.

Dans les deux cas, les termes de la suite sont des graphes finis, donc dans le niveau 0 de la hiérarchie, donc ils ont tous une MSO-théorie décidable.

De plus, on peut faire en sorte pour que ces suites soient strictement croissantes (par l'intermédiaire de l'union avec les structures \mathcal{T}_{exp_n} , $n \geq 0$ par exemple).

Cela n'est donc pas satisfaisant.

4.2 Suites définies par un schéma Unfolding-Interpretation

Pour avancer, on va se limiter à des suites construites de façon *itérative*, à partir des opérations définies précédemment, à savoir, les unfoldings et MSO-interprétations.

Une suite basée sur un schéma unfolding-interprétation va être définie par son premier terme G_0 et par un mécanisme de construction des autres termes. Ce mécanisme est décrit par un unfolding \mathcal{U} (c'est-à-dire la donnée d'une formule $\varphi(x)$ de la logique MSO qui va définir le(s) sommet(s) qui sera(seront) la(les) racine(s) de l'unfolding); et par une MSO-interprétation \mathcal{I} (donnée par sa formule de domaine $\delta(x)$ et ses formules d'arêtes $\psi_a(x, y)$, $a \in \Sigma$).

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{I} \circ \mathcal{U}$. Alors $\forall n \geq 0, G_{n+1} = \mathcal{F}(G_n)$

4.2.1 Schéma non linéaire, arborescent

Optons pour la construction suivante : on utilise une MSO-interprétation et un unfolding généralisé, i.e. on effectue l'unfolding à partir d'un ensemble de sommets : on parle alors de schéma arborescent ou non linéaire.

Soit un schéma arborescent $(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = (\varphi, (\psi_1, \psi_2))$. $\varphi(x)$ est la MSO-formule codant les sommets des unfoldings. $\psi_1(x, y)$ est la formule de domaine, $\psi_2(x, y, z)$ la formule de relation.

Pour une étape du schéma :

- on sélectionne les sommets u des unfoldings vérifiant la formule φ

- pour chaque sommet u , on applique la MSO-interprétation donnée par les formules $\psi_1(u, y)$ (pour les sommets y du domaine) et $\psi_2(u, y, z)$ (pour les arêtes (y, z)).
- on effectue les unfoldings en partant des sommets u et on concatène l'arbre obtenu à la structure de départ en confondant le sommet u et la racine de l'arbre résultat de l'unfolding.

Un tel schéma permet-il de conserver la propriété de décidabilité des MSO-théories ?

Théorème 5 (Théorème de composition pour le schéma arborescent). *Soit T un arbre et soit un schéma arborescent $(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = (\varphi, (\psi_1, \psi_2))$. $\varphi(x)$ est la MSO-formule codant les sommets des unfoldings. On suppose que ces sommets sont sur la frontière de l'arbre T . $\psi_1(x, y)$ est la formule de domaine, $\psi_2(x, y, z)$ la formule de relation.*

Il existe une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que étant donné un entier n , on peut calculer le n -type de $\mathcal{U} \circ \mathcal{I}(T)$ à partir du $g(n)$ -type de T .

Démonstration. Pour chaque sommet $u \in \varphi^T(x)$, on définit le graphe

$$M_u = (V_{M_u}, E_{M_u})$$

$$V_{M_u} = \{ v \in V_T \mid (u, v) \in \psi_1^T(x, y) \}$$

$$E_{M_u} = \{ (v, w) \in V_T \times V_T \mid (u, v, w) \in \psi_2^T(x, y, z) \}$$

En appliquant le lemme 2, on sait qu'il suffit de connaître le $f(n)$ -type de M_u pour calculer le n -type de $Unf(M_u, u)$. (où f est la fonction du lemme). Prenons ϕ une MSO-formule construite sur M_u . Elle fait intervenir $\forall z, \forall Z$ et $E_a(X, Y)$, qui sont interprétés comme $\forall z \in V_{M_u}, \forall Z \subset V_{M_u}$ et $(X, Y) \subset E_{M_u}$.

Pour exprimer cette formule dans (T, u) , il faut faire quelques modifications syntaxiques dans ϕ :

- “ $\forall z, \psi_1(v, z) \Rightarrow$ ” à la place de “ $\forall z$ ”
- “ $\psi_2(v, z_1, Z_2)$ ” à la place de “ $(z_1, z_2) \in E_{M_u}$ ”

Soit l la profondeur maximale de quantificateur de ψ_1 et ψ_2 . La nouvelle formule ainsi obtenue $\widehat{\psi}$ est alors de profondeur de quantificateur $f(n) + l$ au maximum.

Donc, pour calculer le n -type de $Unf(M_u, u)$, on se sert du $f(n)$ -type de M_u , et pour calculer le $f(n)$ -type de M_u , on utilise le $(f(n) + l)$ -type de (T, u) .

On effectue maintenant un étiquetage de la frontière de l'arbre par des prédicats P_τ , où τ est un $(f(n) + l)$ -type :

$$P_\tau = \{ u \in V_T \mid T \models \varphi[u], (T, u) \text{ est de type } \tau \}$$

P_τ est définissable par des MSO-formules de profondeur de quantificateur $|\varphi| + f(n) + l$, où $|\varphi|$ est la profondeur de quantificateur de φ .

Donc le n -type de $(T, (P_\tau))$ est calculable à partir du $(|\varphi| + f(n) + l)$ -type de T . Posons $g(n) = |\varphi| + f(n) + l$. Il reste à montrer que connaître le n -type de $(T, (P_\tau))$ est suffisant pour connaître le n -type de $\mathcal{U} \circ \mathcal{I}(T)$. Ceci est vérifié par le second lemme de décomposition de W. Thomas dans [Tho84]. \square

Corollaire. *Soit T un arbre et soit $(\mathcal{U}, \mathcal{I})$ un schéma arborescent. Si $\text{MSO-Th}(T)$ est décidable, alors $\text{MSO-Th}(\mathcal{U} \circ \mathcal{I}(T))$ est décidable.*

Le schéma arborescent est trop expressif.

Avec un schéma arborescent, on peut effectuer jusqu'à une infinité dénombrable d'unfoldings à chaque étape. En utilisant cela, Wolfgang Thomas dans [Tho08] a montré que l'on pouvait coder le problème de l'arrêt sur un mot d'une machine de Turing par une MSO-formule sur une structure limite. Donc la limite obtenue par schéma arborescent n'a pas nécessairement une MSO-théorie décidable.

On va montrer qu'un schéma arborescent qui utilise simplement un nombre fini mais non borné d'unfoldings à chaque étape peut donner également un résultat indécidable. Pour cela, nous allons construire la grille avec un tel schéma. Explicitons le dispositif :

À chaque étape de la suite, on construit le triangle de dimension $n \times n$ (moitié supérieure de la grille).

On part d'un graphe $G_1 = (V, E_a, E_b, E_c)$ avec $V = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0)\}$, $E_a = \{((0, 0), (1, 0))\}$, $E_b = \{((0, 0), (0, 1))\}$, $E_c = \{((0, 1), (0, 1))\}$. (cf. fig.5)

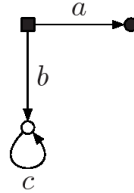


FIG. 5 – Le graphe G_1

Définissons quelques formules utiles pour les unfoldings et MSO-interprétations :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exists y z E_a(x, y) \wedge E_b(x, z) \wedge E_c(z, z) \\ \varphi_1(x) &= \exists y z \text{Racine}(z) \wedge E_{a^*}(z, y) \wedge \text{Feuille}(y) \wedge E_a(x, y) \\ \varphi_2(x) &= \exists y z \text{Racine}(z) \wedge E_{b^*}(z, y) \wedge E_c(y, y) \wedge E_b(x, y) \end{aligned}$$

Décrivons alors les transformations :

- Unfolding : $\phi(r) = \exists x \varphi(x) \wedge E_b(x, r)$.
Les sommets des unfoldings à l'étape n sont ϕ^{G^n} . (Ce sont les noeuds où il y a une boucle c).
- MSO-interprétation \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \psi_a(x, y) &= E_a(x, y) \vee (\exists z \varphi(z) \wedge E_b(z, x) \wedge E_c(x, y)) \\ &\quad \vee (\exists z z_1 z_2 \varphi_1(z) \wedge E_a(z, x) \wedge E_b(z, z_1) \wedge E_c(z_1, z_2) \wedge E_c(z_2, y)) \\ \psi_b(x, y) &= E_b(x, y) \vee (\exists z z_1 \varphi(z) \wedge E_a(z, x) \wedge E_b(z, z_1) \wedge E_c(z_1, y)) \\ &\quad \vee (\exists z z_1 z_2 \varphi_2(z) \wedge E_b(z, x) \wedge E_c(x, z_1) \wedge E_c(z_1, z_2) \wedge E_c(z_2, y)) \\ \psi_c(x, y) &= (\forall z \neg \psi_a(x, z) \wedge \neg \psi_b(x, z)) \wedge (\exists z_1 \psi_b(z_1, x) \wedge \psi_b(z_1, y)) \end{aligned}$$

On peut voir l'application de ces deux transformations sur la figure 6

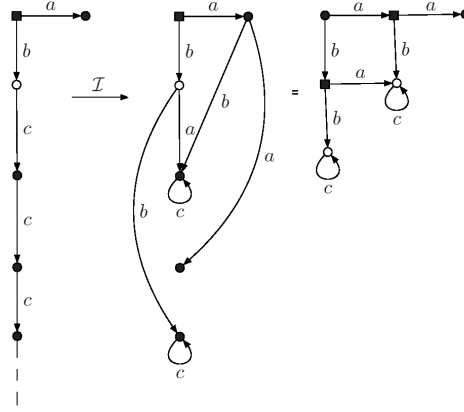


FIG. 6 – Une étape de construction : Unfolding et MSO-interprétation de G_1

Les multiples unfoldings permettent d'ajouter des sommets dans la structure tout en préservant ce qui a déjà été construit. Les MSO-interprétations permettent d'ajouter une rangée dans la grille.

Sur la figure 7, les sommets carrés sont les modèles de $\varphi(x)$. Celui tout en haut est le seul modèle de φ_1 , celui tout en bas, le seul modèle de φ_2 . Les sommets en blanc sont les sommets des unfoldings.

Cette suite a comme limite la grille. Le schéma non linéaire peut donc conduire à des structures dont la MSO-théorie est indécidable. Il est trop expressif.

4.2.2 Schéma linéaire

On se contente désormais d'un schéma plus restrictif avec une MSO-interprétation et un unfolding à un seul sommet. Si on part d'un graphe G ayant une MSO-théorie décidable, appliquer une étape du schéma à G (un

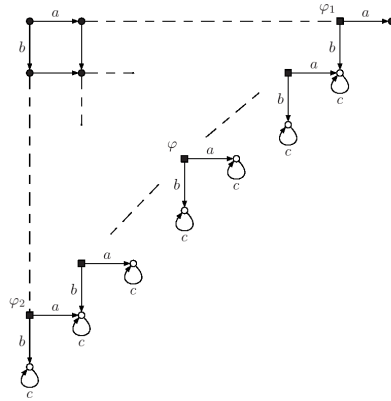


FIG. 7 – Après n étapes de construction

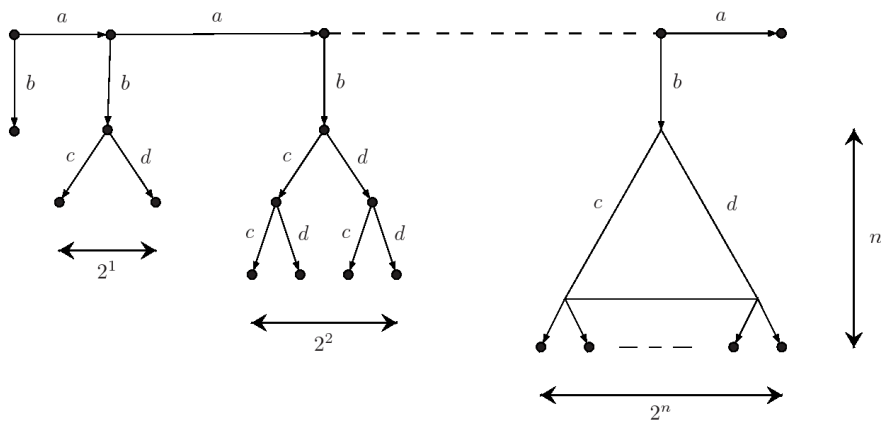


FIG. 8 – Unfolding du graphe fig. 3

unfolding et une MSO-interprétation) donne une structure dont la théorie est aussi décidable (d'après les théorèmes 3 et 4).

Aspect constructif du schéma linéaire

Montrons tout d'abord que ce schéma est suffisamment expressif ; en effet, on peut construire explicitement une suite avec ce schéma qui est strictement croissante dans la hiérarchie de Caucal.

De plus, sa limite aura une MSO-théorie décidable.

Wolfgang Thomas dans [Tho08] a construit une suite grâce à un schéma linéaire qui conduisait à avoir comme limite la structure $(\mathbb{N}, Succ, P)$ où P est l'ensemble des hyperpuissance de 2. $P = \{ 2 \uparrow^k (0), k \geq 0 \}$.

Construction de notre suite :

Reprenons à partir de la figure 3. On applique un unfolding à la racine. On obtient l'arbre de la figure 8. Dans la suite de la construction, tous les unfoldings se font à la racine.

Décrivons la seconde MSO-interprétation : intuitivement, les feuilles de chaque arbre sont reliées à leur voisin de gauche par deux nouvelles arêtes étiquetées par e et f . La feuille la plus à gauche (terminant le chemin a^+bc^+) est reliée au fils b de la racine principale.

Formellement, on décrit d'abord des prédicats utiles à la construction : $Rac(x)$ est vrai pour la racine x de l'arbre.

$Arbre_{c,d}(x, y)$ est vrai si les sommets x et y sont dans le même sous-arbre étiqueté uniquement par c et d .

$Feuille(x)$ est vrai si x est une feuille.

$Feuillegauche_c(x)$ est vrai si x est la feuille la plus à gauche dans un sous-arbre étiqueté par c

$Cote_{c,d}(x, y)$ si x et y sont des feuilles du même arbre étiqueté par c et d et si x est voisin droit de y .

Dans ce cas, on définit les nouvelles arêtes : rien ne change pour E_i , $i \in \{a, b, c, d\}$.

$$\psi_e(x, y) = \psi_f(x, y) = Cote_{c,d}(x, y) \vee (Feuillegauche_c(x) \wedge \exists z Rac(z) \wedge E_b(z, y))$$

Détails :

$$Rac(x) = \forall y \bigwedge_{i \in \{a, b, c, d, e, f\}} \neg E_i(y, x)$$

$$Arbre_{c,d}(x, y) = \exists z_1 z_2 E_b(z_1, z_2) \wedge E_{(c+d)^*}(z_2, x) \wedge E_{(c+d)^*}(z_2, y)$$

$$Feuille(x) = \forall y \bigwedge_{i \in \{a, b, c, d, e, f\}} \neg E_i(x, y)$$

$$Feuillegauche_c(x) = Feuille(x) \wedge \exists yz (E_b(y, z) \wedge E_{c^*}(z, x))$$

$$Cote_{c,d}(x, y) = Arbre_{c,d}(x, y) \wedge Feuille(x) \wedge Feuille(y) \wedge \exists z_1 z_2 z_3 (E_c(z_1, z_2) \wedge E_d(z_1, z_2) \wedge E_{d^*}(z_2, y) \wedge E_{c^*}(z_3, x))$$

$E_L(x, y)$ est vrai s'il existe un chemin étiqueté par un mot de A entre x et y , où L est un langage régulier.

On obtient ainsi le graphe de la figure 9.

On applique un unfolding, puis il reste à décrire l'interprétation \mathcal{I}_3 qui sera utilisée pour la construction de la suite. On définit son domaine : $\delta(x) = Arbre_{c,d}(x) \vee Arbredroit_{e,f}(x) \vee \exists z (Rac(z) \wedge E_{a^*}(z, x))$.

On conserve les arêtes E_a et E_b .

$$\psi_c = E_c \vee E_e \text{ et } \psi_d = E_d \vee E_f$$

$$\psi_e(x, y) = \psi_f(x, y) = Cote_{e,f}(x, y) \vee (Feuillegauche_e(x) \wedge \exists z Rac(z) \wedge E_b(z, y))$$

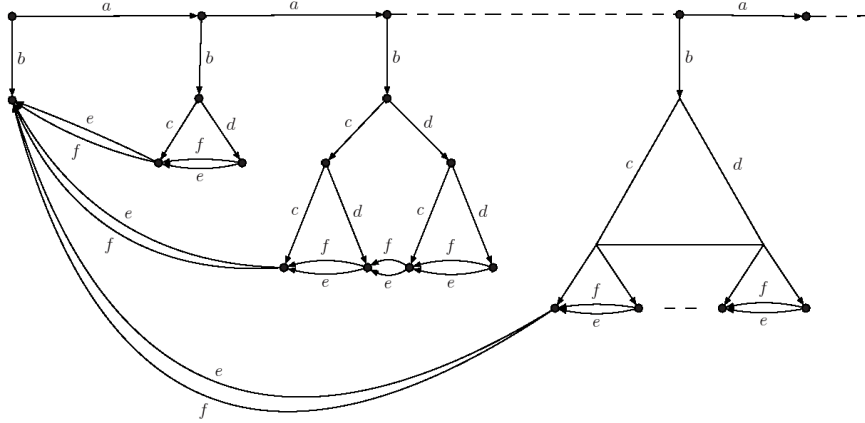


FIG. 9 – Graphe G_2 :MSO-interprétation dans le graphe de la figure 8

Le schéma est ainsi complètement décrit :

$$\forall k \geq 3, G_k = \mathcal{I}_3(T_k), T_{k+1} = \text{Unf}(G_k)$$

Décrivons l'arbre T_k : Après avoir lu n a et un b (en partant de la racine), on a une suite d'arbres t_n^1, \dots, t_n^{k-1} où la racine de t_n^i est confondue avec la feuille à l'extrême droite de t_n^{i-1} , $2 \leq i \leq k-1$. De plus t_n^i possède $2 \uparrow^i(n)$ feuilles, pour $1 \leq i \leq k-1$. Sur l'arbre t_n^{k-2} , il y a également des arbres partant de toutes les feuilles. Ces arbres vont disparaître après la MSO-interprétation suivante : en effet, on ne garde que les arbres "droits" (dont la racine est une feuille à l'extrémité droite d'un arbre).

La limite obtenue T_ω correspond à la description de l'arbre T_k , si ce n'est que les suites d'arbres sur chaque branche sont infinies (cf. fig. 10).

Proposition 3.

- (a) $(T_k)_{k \geq 0}$ est obtenue par un schéma linéaire *Unfolding/MSO-interprétation*.
- (b) $(T_k)_{k \geq 0}$ est une suite strictement croissante dans la hiérarchie de *Caucal*.
- (c) Sa limite T_ω n'est pas dans la hiérarchie de *Caucal*.
- (d) $\text{MSO-Th}(T_\omega)$ est décidable.

Preuve. (a) Par construction, $T_{k+1} = \text{Unf}(\mathcal{I}_3(T_k))$ pour tout $k \geq 3$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}, k > 0$. La structure T_k est obtenue après k étapes de construction (unfolding et MSO-interprétation), en partant du niveau 0 de la hiérarchie de *Caucal* (graphe fini). Ainsi, $T_k \in \mathcal{T}_j, \forall j, 0 \leq j \leq k$. De plus, une MSO-interprétation de T_k permet d'obtenir l'arbre de la fonction

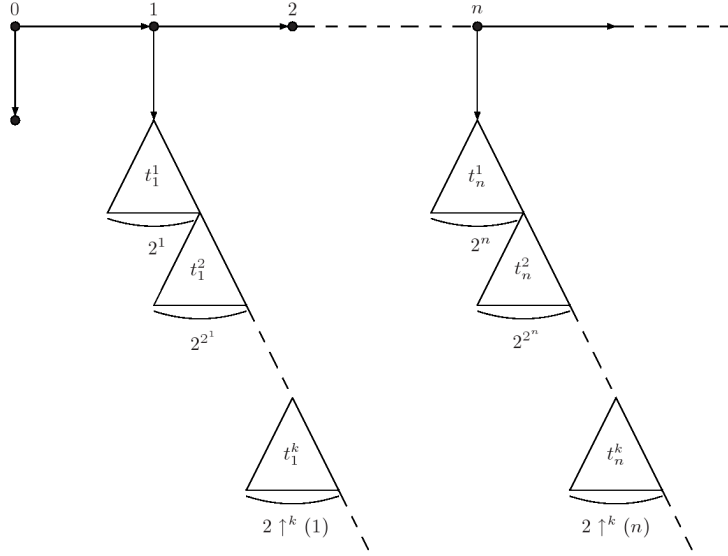


FIG. 10 – T_ω , la limite de la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$

exp_{k-1} . Cet arbre est dans \mathcal{T}_k et pas dans \mathcal{T}_{k-1} (résultat de Carayol & Wörhle dans [CW03]). Donc $T_k \notin \mathcal{T}_{k-1}$. Finalement, $T_k \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_{k-1}$. Ceci est valable pour tout $k > 0$. La suite $(T_k)_{k \geq 0}$ est donc strictement croissante dans la hiérarchie de Caucal.

(c) Considérons la $n^{\text{ième}}$ suite d'arbre $(t_n^i)_{i \geq 0}$ de T_ω . En lui appliquant une MSO-interprétation, on obtient l'arbre de la fonction exp_ω^n définie par $exp_\omega^n(k) = exp_k(n) = 2 \uparrow^k (n)$. Cet arbre dont la MSO-théorie est décidable n'est pas dans la hiérarchie, donc T_ω non plus. (Sinon si $T_\omega \in \mathcal{T}_k$, une MSO-interprétation de T_ω donnerait une structure dans \mathcal{G}_k)

(d) La décidabilité s'obtient par la méthode des types et en utilisant la décidabilité des structures $(\mathbb{N}, Succ, P_n)$ avec $P_n = \{ exp_k(n) \mid k \geq 0 \}$, pour $n \geq 0$. ([ER66] [Tho97a] [Tho84])

□

Remarque. Notre construction donne un moyen explicite de construire des structures se trouvant dans le niveau k de la hiérarchie de Caucal. En particulier, on a un processus de construction pour l'ensemble des multiples hyper-puissances de 2 : $\{2 \uparrow^k (n), k \geq 0, n \geq 0\}$. On ne sait que peu de choses sur les hauts niveaux de la hiérarchie de Caucal. On ne connaît pas non plus beaucoup d'exemples de structures ayant une MSO-théorie décidable et se trouvant hors de la hiérarchie.

Aspect restrictif du schéma linéaire

Nous verrons dans la suite qu'il est possible d'obtenir des structures limites dont leur MSO-théorie est indécidable en partant d'une structure ayant une MSO-théorie décidable et en appliquant un schéma linéaire de construction. Malgré cela, le schéma linéaire est tout de même plus restrictif que le schéma arborescent.

Proposition 4. *Avec un schéma unfolding-interprétation linéaire, on ne peut pas obtenir la grille comme limite.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que l'on a une suite $(G_n)_{n \geq 0}$, définie par un schéma unfolding-interprétation linéaire, telle que sa limite G_ω soit la grille. Soit r la racine de la grille G_ω . Alors, d'après la définition de la limite (cf. section 4, prop.2), pour tout $N > 0$, il existe un rang n_0 suffisamment grand tel que la grille de taille $N \times N$ enracinée en r soit contenue dans G_n , pour tout $n \geq n_0$.

Si le sommet de départ de l'unfolding p est dans ce motif de grille, appliquer l'unfolding va transformer la grille en arbre binaire.

Si le sommet de départ de l'unfolding p se situe à une profondeur d'au moins N dans le graphe, par rapport à la racine r du motif de la grille, deux cas peuvent alors se produire :

- depuis p , il existe un chemin dans le graphe qui rejoint r . Alors, appliquer l'unfolding transforme la grille en arbre binaire.
- depuis p , il n'existe aucun chemin qui rejoint r . Alors appliquer l'unfolding fait disparaître la grille à l'étape suivante. Cela est impossible : le même motif de la grille est présent dans tous les graphes G_n , $n \geq n_0$.

Ainsi, dans tous les cas, appliquer un unfolding détruit le motif de la grille $N \times N$. Donc la MSO-interprétation qui suit doit reconstruire ce motif (puisqu'il apparaît à toutes les étapes qui suivent). La MSO-interprétation, qui est la même pour toutes les étapes et quelque soit la taille de la grille, doit permettre alors de transformer un arbre binaire en grille de taille $N \times N$ ceci pour tout $N \geq 0$.

Si cela est possible, appliquer cette MSO-interprétation dans l'arbre binaire infini donnerait comme résultat la grille infinie. Or, l'arbre binaire infini est dans le niveau 1 de la hiérarchie de Caucal, donc la grille devrait être un graphe du niveau 1 (un graphe prefix-reconnaisable); donc aurait une MSO-théorie décidable, ce qui est faux.

□

Limite du schéma linéaire

Pourtant, le schéma linéaire peut s'avérer dangereux pour la décidabilité. En effet, il est possible d'obtenir un arbre limite contenant toutes les exécutions d'une machine de Turing, ce qui rend cette structure limite indécidable pour

la MSO-théorie. En effet si on part d'un graphe suffisamment complexe au départ, on peut simuler l'exécution d'une machine de Turing à chaque étape de la suite.

Nous voulons tout d'abord obtenir l'arbre codant toutes les configurations initiales de la machine de Turing \mathcal{M} . Pour cela, nous partons d'un graphe fini à trois sommets r_0 , r_1 et r_2 . Il y a une arête étiquetée par q_0 , l'état initial de \mathcal{M} . Sur r_1 , il y a n boucles étiquetées par $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, l'alphabet de la machine de Turing; et il y a une arête entre r_1 et r_2 étiquetée par $\$$. Prenons l'unfolding de ce graphe en partant de r_0 : on obtient un arbre régulier où les chemins entre la racine r_0 et un sommet quelconque dans l'arbre donnent tous les mots de $q_0\Sigma^*$.

Nous voulons maintenant dupliquer ces mots, qui représentent les configurations initiales de \mathcal{M} . Pour cela on utilise une étape du schéma arborescent. Les unfoldings vont être fait à tous les sommets de l'arbre ($\varphi(x) = true$). Pour chaque sommet u de l'arbre, la MSO-interprétation sélectionne un domaine particulier : le chemin entre la racine r_0 et u . Elle permet de conserver les arêtes et les sommets sur ce chemin, et d'ajouter une arête de retour entre u et r_0 , étiquetée par $\$$.

Après les unfoldings, on obtient le même arbre que précédemment mais avec les chemins supplémentaires suivants : pour tout sommet dans l'arbre u , si on note w le mot lu sur le chemin de r_0 à u , on a une branche infinie de nouveaux sommets qui part de u et étiquetée par le mot $(\$w)^\omega$. Ce nouvel arbre a une MSO-théorie décidable, d'après le théorème 5 : on applique une étape du schéma arborescent à un graphe ayant une MSO-théorie décidable, car dans le niveau 1 de la hiérarchie de Caucal.

En prenant ce nouvel arbre comme point de départ, on va maintenant décrire un schéma linéaire qui à chaque étape, va simuler un pas de la machine \mathcal{M} . En le faisant une infinité, on obtient une structure limite qui a une MSO-théorie indécidable ! L'unfolding va toujours être effectué à la racine. Une étape de MSO-interprétation va faire évoluer d'un pas toutes les configurations codées dans l'arbre selon la table de transition de la machine \mathcal{M} .

La MSO-interprétation sélectionne toutes les branches de l'arbre étiquetées par un mot de $(\Sigma \cup Q)^*\$(\Sigma \cup Q)^*\$$. Elle oublie ce qui se trouve sur les branches après deux symboles $\$$. Pour chaque branche, l'interprétation ne va pas toucher qu'à ce qui se trouve entre les deux $\$$ (ruban de travail). Ce qui se trouve avant le premier $\$$ est la configuration initiale : elle reste inchangée ; ce qui se trouve après le second $\$$ est oublié. Si on a le motif $\$w_1vw_2\$$ où $v = bqa$, on le transforme en $\$w_1v'w_2\$$, avec v' dépend de la table de transition de la machine de Turing. Dans le cas particulier où la transition dans la machine \mathcal{M} remplace un $\$$ par une lettre a , l'interprétation va remplacer $\$$ par a puis ajouter un sommet et une arête vers ce sommet étiquetée par $\$$.

Soit u_1 le sommet situé sur une branche, juste après la première arête étiquetée par $\$$, et soit u_2 le sommet situé juste avant la seconde arête étiquetée par $\$$. Dans tous les cas, i.e. pour toutes les branches, l'interprétation ajoute une arête étiquetée par $\$$ entre les sommets u_2 et u_1 .

Toutes ces opérations sont exprimables par des MSO-formules finies, qui seront les mêmes pour toutes les étapes successives. Une unique MSO-interprétation est donc requise.

Ainsi, une étape du schéma linéaire permet de simuler une étape de calcul de la machine de Turing \mathcal{M} , ceci simultanément pour toutes les configurations initiales possibles. On applique ce schéma une infinité de fois, et on considère la limite obtenue T_ω .

Étant donné une configuration initiale $w_0 = q_0w$ de la machine \mathcal{M} , on peut écrire une MSO-formule ϕ_{w_0} telle que : $T_\omega \models \phi_{w_0}$ ssi il existe un chemin dans T_ω qui lit w_0 puis un mot contenant $q_f \in Q$, un état final acceptant. Ainsi, la machine de Turing \mathcal{M} accepte le mot w ssi $T_\omega \models \phi_{w_0}$. La MSO-théorie de T_ω est donc indécidable.

Si l'on prend comme point de départ une structure suffisamment complexe mais dont la MSO-théorie est toujours décidable (dans notre cas, le point de départ du schéma linéaire est l'arbre de toutes les configurations initiales avec leur copie), on peut donc obtenir des limites ayant des MSO-théories indécidables avec le schéma linéaire. Il serait intéressant d'étudier en détail l'influence de la structure de départ sur la décidabilité de la structure limite dans le cas du schéma linéaire (structure de départ dans la hiérarchie de Caucal ou non).

Conclusion

Ce rapport s'intéresse aux suites de graphes dans la hiérarchie de Caucal, ainsi qu'à leur limite. Il pose les premières bases sur les suites de graphes et sur leur construction par unfolding et MSO-interprétation. Deux types de schéma ont été définis et étudiés, un schéma linéaire et un schéma arborescent. On a montré que ces deux schémas conservaient la décidabilité des MSO-théories à chaque étape de construction des suites de graphes.

En revanche, ils sont dans le cas général trop expressif. D'un côté, le schéma arborescent permet d'obtenir la grille en structure limite, en partant d'un graphe fini. De l'autre, le schéma linéaire, qui pourtant est plus restrictif que le schéma arborescent (on ne peut pas obtenir la grille avec un schéma linéaire), permet d'obtenir une suite simulant l'exécution d'une machine de Turing, et donc conduit à une limite ayant une MSO-théorie indécidable. Mais il mérite une étude approfondie : en effet, il permet de générer de nouvelles structures ayant une MSO-théorie décidable (l'arbre

des hyper-puissances multiples de 2), si on commence la construction avec un graphe fini. Il permet également de construire explicitement des structures situées à n'importe quel niveau de la hiérarchie de Caucal. De plus, il est strictement plus restrictif que le schéma arborescent .

Il serait intéressant d'étudier le lien entre la décidabilité de la MSO-théorie de la structure limite et le choix de la structure initiale. Il peut être également judicieux de chercher à restreindre davantage le schéma linéaire afin de pouvoir conclure dans le cas général sur la décidabilité de la MSO-théorie de la limite.

Références

- [BB02] D. Berwanger and A. Blumensath. The monadic theory of tree-like structures. *Lecture Notes In Computer Science 2500*, pages 285–301, 2002.
- [Blu08] A. Blumensath. On the structure of graphs in the Caucal hierarchy. *Theoretical Computer Science*, 400, 2008.
- [Cau02] D. Caucal. On infinite terms having a decidable monadic theory. *MFCS*, pages 165–176, 2002.
- [Cau03] D. Caucal. On infinite transition graphs having a decidable monadic theory. *Theoretical Computer Science*, 290(1) :79–115, 2003.
- [CT00] O. Carton and W. Thomas. The Monadic Theory of Morphic Infinite Words and Generalizations. *25th MFCS, LNCS*, 1893 :275–284, 2000.
- [CW03] A. Carayol and S. Wöhrle. The Caucal hierarchy of infinite graphs in terms of logic and higher-order pushdown automata. *FST TCS 2003 : Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science., LNCS*, 2914 :112–123, 2003.
- [ER66] C.C. Elgot and M.O. Rabin. Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor. *Journal of Symbolic Logic*, 31(2) :169–181, 1966.
- [Tho84] W. Thomas. Logical aspects in the study of tree languages. In B. Courcelle, editor, *Proceedings of the 9th International Colloquium on Trees in Algebra and Programming, CAAP '84*, pages 31–50, 1984.
- [Tho97a] W. Thomas. Ehrenfeucht games, the composition method, and the monadic theory of ordinal words. In J. Mycielski et al., editors, *Structures in Logic and Computer Science, A Selection of Essays in Honor of A. Ehrenfeucht*, LNCS, 1261 :118–143, 1997.
- [Tho97b] W. Thomas. Languages, automata, and logic. *Handbook of Formal Languages*, 3 :389–455, 1997.

- [Tho03] W. Thomas. Constructing Infinite Graphs with a Decidable MSO-Theory. *28th MFCS, LNCS, 2747* :113–124, 2003.
- [Tho08] W. Thomas. Model Transformations in Decidability Proofs for Monadic Theories. *Computer Science Logic*, 2008.