

Modéliser les ordinateurs: introduction à la calculabilité

Manon Blanc

11/03/2023

RJMI ENS Paris-Saclay

La science des ordinateurs, inventer des machines à calculer

Motivations: c'est quoi un algorithme?

Calculabilité

La machine de Turing

Intérêts

Vers la complexité: apprendre à ranger

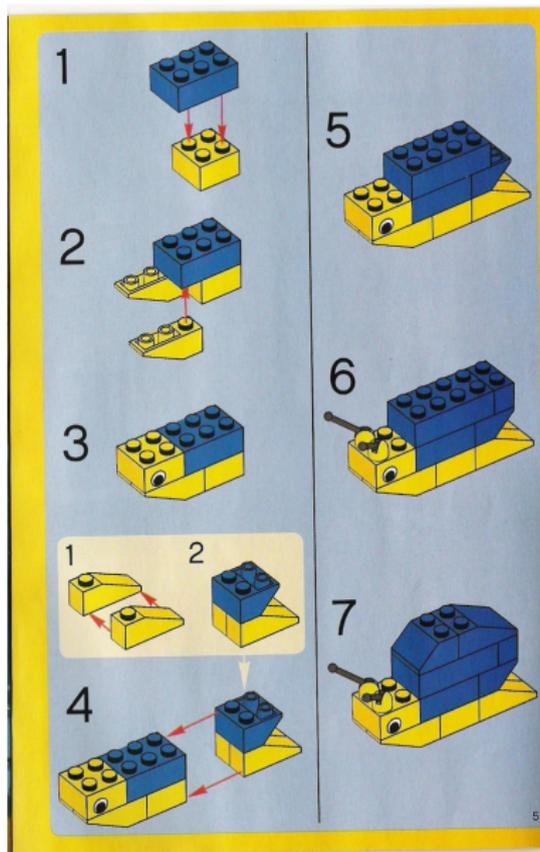
Ada Lovelace: Une mère fondatrice des ordinateurs (entre autres...)



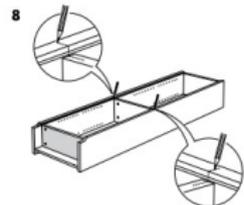
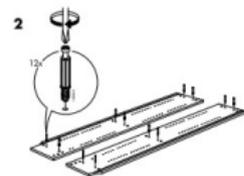
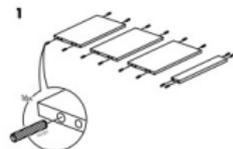
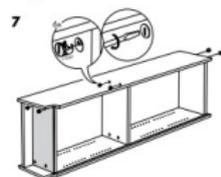
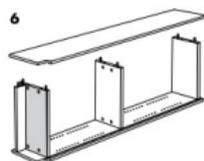
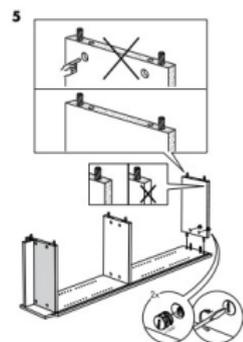
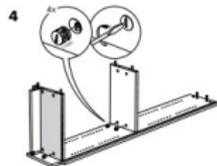
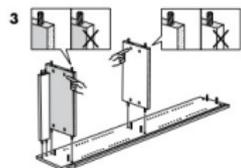
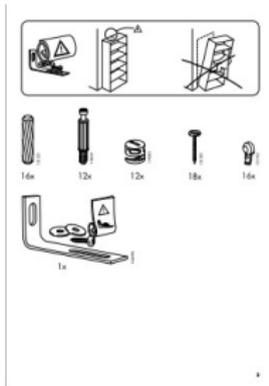
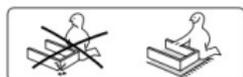
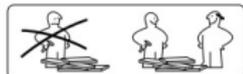
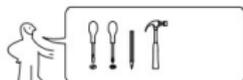


“Mon travail mathématique implique une imagination considérable”

Essentiellement, c'est ça



BILLY



Un premier exemple

Entrée: Un entier i

Si: $i \geq 11$

Retourner: “ i est plus grand que 11”

Sinon:

Retourner: “ i n'est pas plus grand que 11”

Et les problèmes commencent à apparaître...

Entrée: Un entier i plus grand que 0

Tant que: $i \geq 0$

$i \leftarrow i + 1$

Retourner: La valeur de i

Et les problèmes commencent à apparaître...

Entrée: Un entier i plus grand que 0

Tant que: $i \geq 0$

$i \leftarrow i + 1$

Retourner: La valeur de i

⇒ Certains programmes ne terminent pas: comment le détecter?

Un autre type de problème: Le paradoxe du menteur

Phrase attribuée à Épiménide le Crétois:

“Tous les Crétois sont des menteurs”

Un autre type de problème: Le paradoxe du menteur

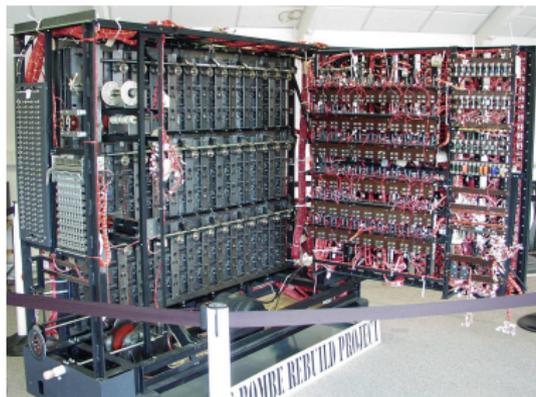
Phrase attribuée à Épiménide le Crétois:

“Tous les Crétois sont des menteurs”

Et si je dis:

“Je mens en ce moment même”

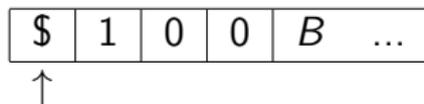
Calculabilité



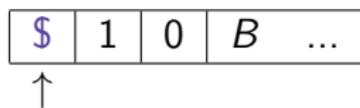


La machine de Turing

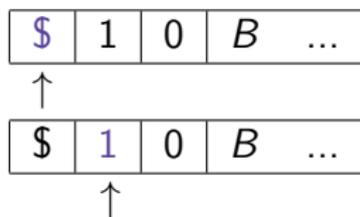
Le modèle:



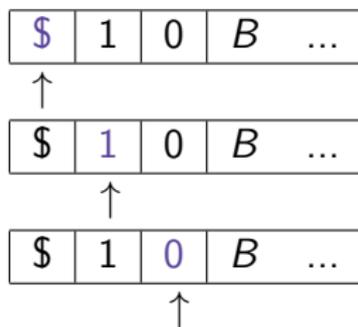
Exemple: faire +1



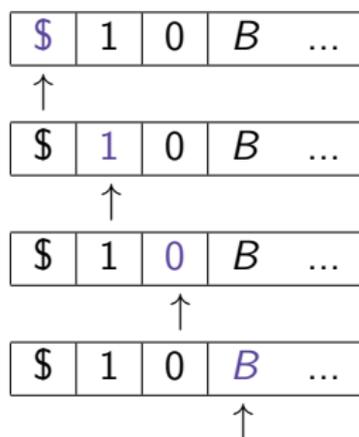
Exemple: faire +1



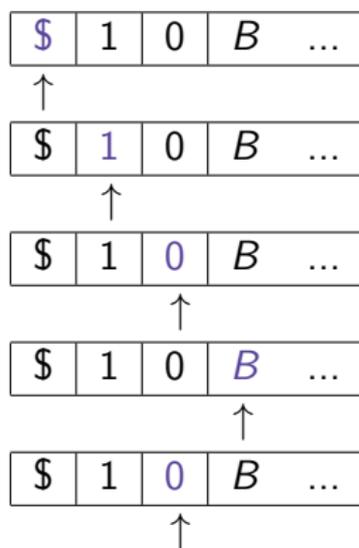
Exemple: faire +1



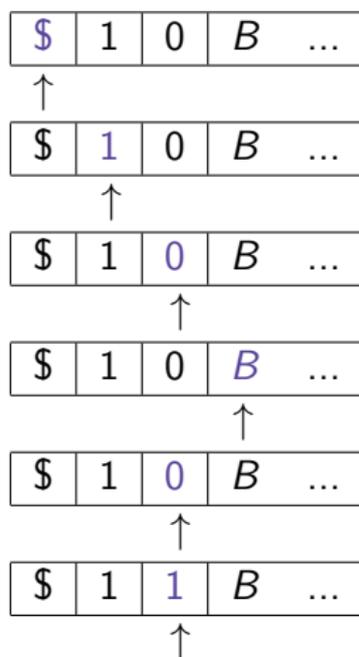
Exemple: faire +1



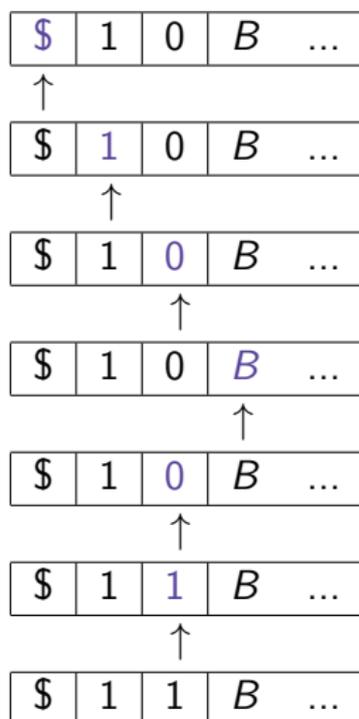
Exemple: faire +1



Exemple: faire +1



Exemple: faire +1



Intérêts

- ▶ Proche de ce qu'il se passe en machine
- ▶ Le langage naturel est ambigu
- ▶ Permet de faire des preuves plus facilement

Qu'est ce qu'on peut faire, ou pas?

- ▶ Ajouter 1 à un entier?

Qu'est ce qu'on peut faire, ou pas?

- ▶ Ajouter 1 à un entier? Oui!
- ▶ Savoir si un algorithme s'arrête?

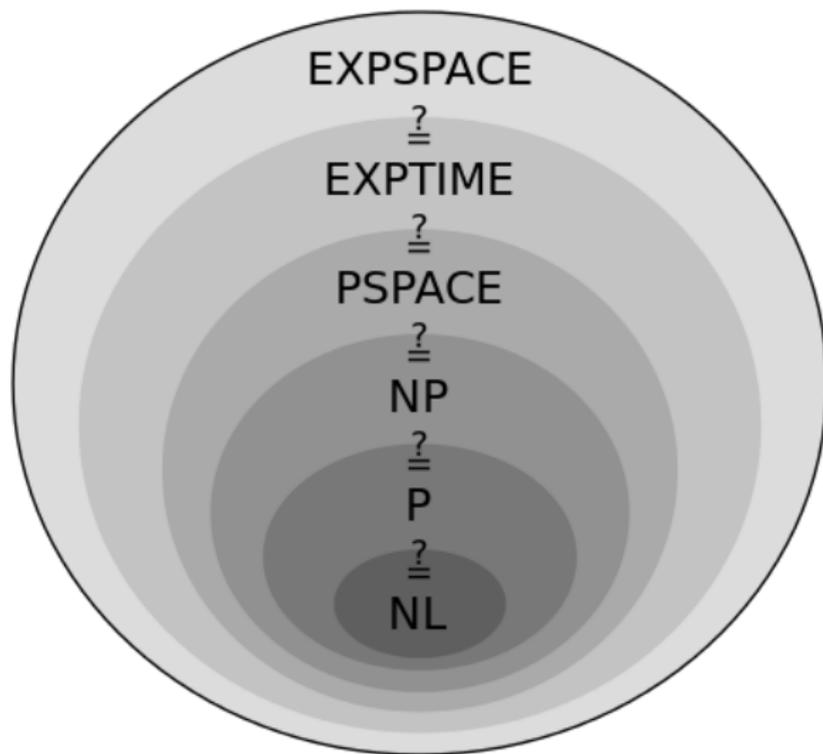
Qu'est ce qu'on peut faire, ou pas?

- ▶ Ajouter 1 à un entier? Oui!
- ▶ Savoir si un algorithme s'arrête? Non...
- ▶ Le paradoxe du menteur?

Qu'est ce qu'on peut faire, ou pas?

- ▶ Ajouter 1 à un entier? Oui!
- ▶ Savoir si un algorithme s'arrête? Non...
- ▶ Le paradoxe du menteur? Non plus...

Vers la complexité: apprendre à ranger



Merci pour votre attention

Démonstration

Le raisonnement par l'absurde

Detection: **Entrée:** Un algorithme A , une entrée x de l'algorithme A

Si: A s'arrête sur x

On fait une boucle infinie

Sinon:

On s'arrête et on accepte

- ▶ Si A s'arrête sur x , alors Detection ne s'arrête pas
- ▶ Si A ne s'arrête pas sur x , alors Detection s'arrête

⇒ On ne peut pas décider certains problèmes...