

Exercice 1 :

Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événement on a

$$P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

où la somme de droite peut diverger.

Solution:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $B_n := A_n \setminus \cup_{k=0}^{n-1} A_k$. On montre par récurrence sur n que $\cup_{k=0}^n B_k = \cup_{k=0}^n A_k$. On en déduit que $B_n \cap \cup_{k=0}^{n-1} B_k = \emptyset$.

Donc $P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$, car $B_n \subseteq A_n$.

Exercice 2 :

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

1. Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements croissante pour l'inclusion, la suite des $P(A_n)$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$$

Solution:

$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \sqcup \cup_{n \in \mathbb{N}} A_{n+1} \setminus A_n$, donc $P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(A_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_{n+1} \setminus A_n)$ donc $\sum_{i=n}^{\infty} P(A_{i+1} \setminus A_i) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Or $P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(A_k) + \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_{n+1} \setminus A_n)$, donc $P(A_n) \rightarrow P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$

2. De même, montrer que pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements décroissante pour l'inclusion, la suite des $P(A_n)$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$$

Solution:

Si la suite est décroissante, alors la suite des $A_0 \setminus A_n$ est croissante. $P(A_n) + P(A_0 \setminus A_n) = P(A_0) = P(\cap_n A_n) + P(\cup_n A_0 \setminus A_n)$. Comme $P(A_0 \setminus A_n) \rightarrow P(\cup_n A_0 \setminus A_n)$ par le résultat ci-dessus, on a $P(A_n) \rightarrow P(\cap_n A_n)$.

Exercice 3 :

Soit $\{B_1, \dots, B_n\}$ une partition de Ω telle que pour tout i , $P(B_i) > 0$. Montrer que pour tout événement A on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)$$

Solution:

$$P(A) = P(A \cap \sqcup_i B_i) = P(\sqcup_i (A \cap B_i)) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A | B_i)P(B_i).$$

Exercice 4 :

Une urne contient n boules noires, b boules blanches et r boules rouges. On tire deux boules sans remise. Quelle est la probabilité de l'évènement "la deuxième boule tirée est noire" ?

Solution:

Soit $S = n + b + r$, soit DN l'événement "la deuxième boule tirée est noire, et N, B, R pour les premières boules.

$$\begin{aligned} P(DN) &= P(DN | N) \cdot P(N) + P(DN | B) \cdot P(B) + P(DN | R) \cdot P(R) \\ &= \frac{n-1}{S-1} \cdot \frac{n}{S} + \frac{n}{S-1} \cdot \frac{b}{S} + \frac{n}{S-1} \cdot \frac{r}{S} \\ &= \frac{n(n+b+r) - n}{S(S-1)} = \frac{n(S-1)}{S(S-1)} = \frac{n}{S} \end{aligned}$$

Exercice 5:

Soit $\{B_1, \dots, B_n\}$ une partition de Ω telle que $P(B_i) > 0$ pour tout i . Alors pour tout événement A tel que $P(A) > 0$ on a

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A | B_j)P(B_j)}$$

Solution:

$P(B_i | A)P(A) = P(A \cap B_i) = P(A | B_i)P(B_i)$ par définition des probabilités conditionnelles. Donc

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

Or, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)$.

Exercice 6:

Il existe des pièces normales (resp. biaisées) qui donnent pile avec une chance sur deux (resp. sur trois). On choisit une pièce dans un coffre, elle est biaisée avec probabilité x . On la lance et elle tombe sur face. Quelle est la probabilité qu'elle soit biaisée ?

Solution:

Normale n , biaisée b , pile p , face f .

$$P(b | f) = \frac{P(f | b)P(b)}{P(f | b)P(b) + P(f | n)P(n)} = \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}(1-x)} = \frac{4x}{3+x}$$

Exercice 7:

On considère deux dés à six faces, l'un est équilibré, l'autre est truqué. On note p_i la probabilité que le dé truqué tombe sur la face i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

1. Décrire l'espace de probabilité.

Solution:

L'univers est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

La tribu des évènements est $\mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est dénombrable. La loi de probabilité P est :

$$\forall (i, j) \in \Omega, P(i, j) = \frac{p_j}{6}$$

Avec p_j la probabilité que le dé truqué retourne le nombre j . On a en plus l'égalité $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

2. (a) Quelle est la probabilité de faire un double ?

Solution:

La probabilité de faire un double est la somme des probabilités de chaque double :

$$\sum_{i=1}^6 Pr(i, i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 p_i = \frac{1}{6}$$

- (b) Quelle est la probabilité que la somme des dés soit égale à 7 ?

Solution:

La probabilité de faire que la somme des dés soit égal à 7 est :

$$\sum_{i=1}^6 Pr(i, 7-i) = \frac{1}{6} \sum_{i=6}^1 p_i = \frac{1}{6}$$

Exercice 8 :

On lance trois dés équilibrés.

1. Quelle est la somme des trois dés la plus probable ?

Solution:

La variable aléatoire S somme des trois dés prend des valeurs entre 3 et 18. On remarque que l'involution $(x, y, z) \mapsto (7-x, 7-y, 7-z)$ échange avec les mêmes probabilités les valeurs s et $21-s$ prises par S . Donc il suffit de calculer les probabilités de $(S = s)$ pour $3 \leq s \leq 10$. On note $[x, y, z]$ l'ensemble des triplets qui définissent la famille x, y, z .

$$P(S = 3) = P([1, 1, 1]) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

$$P(S = 4) = P([1, 1, 2]) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$$

$$P(S = 5) = P([1, 1, 3]) + P([1, 2, 2]) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

$$P(S = 6) = P([1, 1, 4]) + P([1, 2, 3]) + P([2, 2, 2]) = \frac{3 + 6 + 1}{6^3} = \frac{10}{216}$$

$$P(S = 7) = P([1, 1, 5]) + P([1, 2, 4]) + P([1, 3, 3]) + P([2, 2, 3]) = \frac{3 + 6 + 3 + 3}{6^3} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

$$P(S = 8) = P([1, 1, 6]) + P([1, 2, 5]) + P([1, 3, 4]) + P([2, 2, 4]) + P([2, 3, 3]) \\ = \frac{3 + 6 + 6 + 3 + 3}{6^3} = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$$

$$P(S = 9) = P([1, 2, 6]) + P([1, 3, 5]) + P([1, 4, 4]) + P([2, 2, 5]) + P([2, 3, 4]) + P([3, 3, 3]) \\ = \frac{6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1}{6^3} = \frac{25}{216}$$

$$P(S = 10) = P([1, 3, 6]) + P([1, 4, 5]) + P([2, 2, 6]) + P([2, 3, 5]) + P([2, 4, 4]) + P([3, 3, 4]) \\ = \frac{6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3}{6^3} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

Il y a deux sommes plus probables : 10 et 11.

2. Quelle est la moyenne de S ?

Solution:

$$E(S) = \sum_{s=3}^{18} sP(S = s) = \sum_{s=3}^{10} (s + 21 - s)P(S = s) = 21 \sum_{s=3}^{10} P(S = s) = \frac{21}{2}$$

Exercice 9 :

On cherche à simuler la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ avec deux dés indépendants. On note U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 6\}$. Pour tout $1 \leq i \leq 6$, on pose $u_i = P(U = i)$, $v_i = P(V = i)$ et on suppose que $u_i > 0$ et $v_i > 0$.

1. Si U et V suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 6\}$, est-ce que $U + V$ suit la loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$?

Solution:

$$\text{Non. } P(S = 2) = P([1, 1]) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}, P(S = 3) = P([1, 2]) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}.$$

2. On note $S = U + V$ et on suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.
(a) Montrer que $P(x) = Ex^S$ est un polynôme qu'on explicitera.

Solution:

$$Ex^S = \sum_{n=2}^{12} P(S = n)x^n = \frac{1}{11} \sum_{n=2}^{12} x^n = \frac{x^2}{11} \sum_{n=0}^{10} x^n$$

- (b) Démontrer que $Ex^S = Ex^U \cdot Ex^V$.

Solution:

$$\begin{aligned}
Ex^U \cdot Ex^V &= \left(\sum_{i=1}^6 P(U=i)x^i \right) \left(\sum_{j=1}^6 P(V=j)x^j \right) \\
&= \sum_{n=2}^{12} \left(\sum_{i=1}^6 P(U=i)P(V=n-i) \right) x^n \\
&= \sum_{n=2}^{12} P(U+V=n)x^n \\
&= Ex^S
\end{aligned}$$

(c) Conclure en ayant en tête le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution:

On devrait donc avoir $\frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} x^n = \left(\sum_{i=0}^5 u_{i+1}x^i \right) \left(\sum_{i=0}^5 v_{i+1}x^i \right)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\left(\sum_{i=0}^5 u_{i+1}x^i \right)$ a une racine réelle, donc $\frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} x^n$ aussi. Or les racines de $\frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} x^n$ sont les racines 11-èmes de l'unité autres que 1 et il n'y en a pas de réelle. On a donc une contradiction. On ne peut donc pas simuler la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ ainsi.

Exercice 10 :

Soit $k, n \geq 1$ des entiers naturels non nuls. Soient X_0, X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, k \rrbracket$.

1. Soit $S \subset \llbracket 1, k \rrbracket$. Quelle est la probabilité de $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?

Solution:

$$P(X_i \in S) = \frac{|S|}{k}$$

2. Soit $z \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Calculer $P(X_1 \neq z, \dots, X_n \neq z)$.

Solution:

Les variables X_0, X_1, \dots, X_n étant indépendantes, on a :

$$P(X_1 \neq z, \dots, X_n \neq z) = \prod_{i=1}^n P(X_i \neq z)$$

Les variables X_0, X_1, \dots, X_n étant uniformément distribuées, on a :

$$P(X_1 \neq z, \dots, X_n \neq z) = \prod_{i=1}^n P(X_i \neq z) = \prod_{i=1}^n \frac{k-1}{k} = \left(\frac{k-1}{k} \right)^n$$

3. Calculer $P(X_0 \notin \{X_1, \dots, X_n\})$ de deux manières pour en déduire une expression de $E(|\{X_1, \dots, X_n\}|)$.

Solution:

$$\begin{aligned}
P(X_0 \notin \{X_1, \dots, X_n\}) &= \sum_{z=1}^k P(X_0 = z, X_1 \neq z, \dots, X_n \neq z) \\
&= \sum_{z=1}^k P(X_0 = z)P(X_1 \neq z, \dots, X_n \neq z) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{z=1}^k P(X_1 \neq z, \dots, X_n \neq z) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{z=1}^k \left(\frac{k-1}{k}\right)^n \\
&= \left(\frac{k-1}{k}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_0 \notin \{X_1, \dots, X_n\}) &= \sum_S P(\{X_1, \dots, X_n\} = S, X_0 \notin S) \\
&= \sum_S P(\{X_1, \dots, X_n\} = S) \frac{k - |S|}{k} \\
&= \sum_S P(\{X_1, \dots, X_n\} = S) - \frac{1}{k} \sum_S |S| P(\{X_1, \dots, X_n\} = S) \\
&= 1 - \frac{1}{k} E(|\{X_1, \dots, X_n\}|)
\end{aligned}$$

Donc $E(|\{X_1, \dots, X_n\}|) = k(1 - (\frac{k-1}{k})^n) = k(1 - (1 - \frac{1}{k})^n)$.

4. Déterminer la limite ou un équivalent de $E(|\{X_1, \dots, X_n\}|)$ lorsque :

(a) k est fixé et $n \rightarrow +\infty$,

Solution:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k(1 - (1 - \frac{1}{k})^n) = k$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, l'ensemble $\{X_1, \dots, X_n\}$ est $\llbracket 1, k \rrbracket$ très probablement.

(b) n est fixé et $k \rightarrow +\infty$,

Solution:

$$k(1 - (1 - \frac{1}{k})^n) \sim k(1 - (1 - \frac{n}{k})) = n$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, les variables X_1, \dots, X_n prennent des valeurs distinctes très probablement.

(c) $n = k \rightarrow +\infty$.

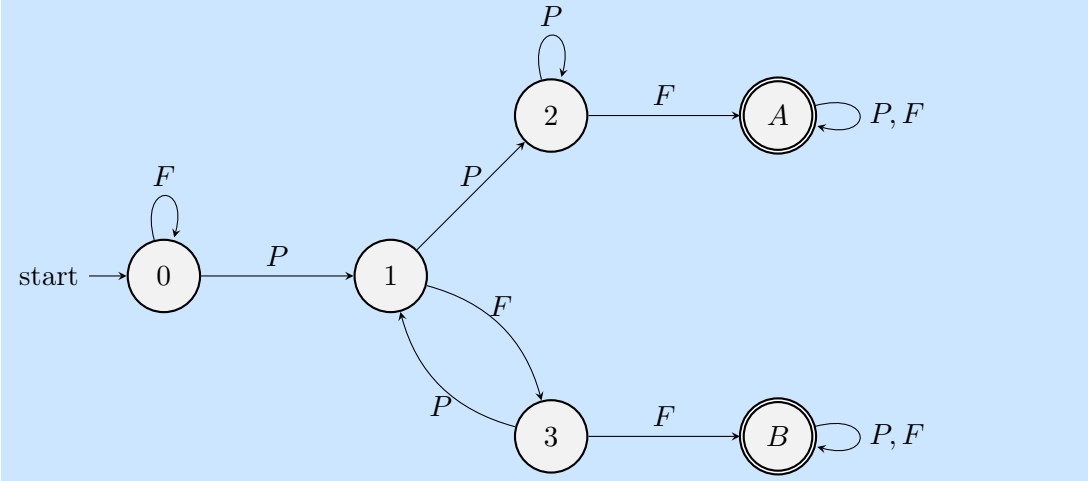
Solution:

$$n(1 - (1 - \frac{1}{n})^n) = n(1 - e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}) \sim n(1 - e^{-1})$$

Exercice 11 (Penney's game) :

Alice et Bob jouent à un jeu sur une séquence de jets d'une pièce. La pièce tombe sur pile (**P**) avec probabilité p et sur face (**F**) avec probabilité $1 - p$. La pièce est relancée jusqu'à ce que l'un des motifs suivants apparaisse : Si le motif **PPF** apparaît, Alice gagne. Si le motif **PFF** apparaît, c'est Bob qui gagne.

- On représente une partie par un mot sur $\{P, F\}$. Dessiner un automate déterministe complet avec deux états puits A et B tels que le langage des mots arrivant sur l'état A (resp. B) correspond aux mots représentant les parties gagnantes d'Alice (resp. Bob).

Solution:

- En déduire une description informelle de l'espace de probabilité (on cherchera à décrire les événements élémentaires).

Solution:

Un événement élémentaire est un ensemble de mots ayant un préfixe partant de 0 dans l'automate. Sa probabilité est $p^m(1-p)^l$ si ce préfixe de longueur $m+l$ contient m P et l F .

- Soit \mathcal{S}_a le langage représentant l'ensemble des parties gagnantes pour Alice \mathcal{S}_A , \mathcal{S}_b le langage représentant l'ensemble des parties gagnantes pour Bob, \mathcal{S}_B et l'ensemble des mots finis qui ne comportent pas encore de gagnant N . Justifier :
 - $P(\mathcal{S}_a) + P(\mathcal{S}_b) = 1$.

Solution:

Le complémentaire de $\mathcal{S}_a \cup \mathcal{S}_b$ est l'ensemble des mots infinis qui restent en 0 (F^∞), stationnent sur 2 ($F^+P(PF)^*P^\infty$), ou bouclent sur les états 1 et 3 ($F^+P(FP)^\infty$). Ces trois langages sont inclus dans $\bigcup_n \{P, F\}^n \{F^\infty, P^\infty, (FP)^\infty\}$ donc sont de probabilités nulles.

- $\mathcal{S}_a = NPPF$ et $\mathcal{S}_a F \sqcup \mathcal{S}_B = NPF F$.

Solution:

$\mathcal{S}_a = NPPF$ est évident.

$NPF F = (N \cap \{F, P\}^* P \cup N \cap \{F, P\}^* F) P F F = \mathcal{S}_a F \cup \mathcal{S}_B$.

- $\{\epsilon\} \sqcup N\{P, F\} = \mathcal{S}_a \sqcup \mathcal{S}_b \sqcup N$.

Solution:

On ajoute un tirage à une partie non terminée (P ou F). Soit Alice gagne, soit Bob gagne, soit la partie est neutre.

4. Résoudre le système obtenu en remplaçant les relations ensemblistes par des relations probabilistes.

Solution:

$$s_a + s_b = 1, s_a = p^2(1-p)n, (1-p)s_a + s_b = p(1-p)^2n.$$

On résout.

$$s_a = \frac{p}{p^2-p+1}, s_b = \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}, n = \frac{1}{-p^4+2p^3-2p^2+p}$$

5. Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?

Solution:

On rajoute la condition $s_a = s_b$. On trouve $p = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38$.

Variables aléatoires

Exercice 12 (Indépendance) :

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace de probabilités à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de mêmes lois définies par :

$$P(U = -1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(U = 1) = \frac{2}{3}$$

Soit X et Y les variables aléatoires définies par : $X = U$ et $Y = UV$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire (X, Y) ?

Solution:

$$P(1, 1) = \frac{4}{9}, P(1, -1) = \frac{2}{9}, P(-1, 1) = \frac{1}{9}, P(-1, -1) = \frac{2}{9} \text{ et } P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution:

Donc $P(X = -1)P(Y = 1) = \frac{5}{27} \neq \frac{1}{9} = P(-1, 1)$, et les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

3. Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Solution:

On remarque que $X^2 = U^2$ et $Y^2 = V^2$ donc les variables sont indépendantes comme fonctions de variables indépendantes.

Exercice 13 (Min, Max et comparaison) :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité de même loi géométrique de paramètre p .

1. Calculer $P(Y \geq X)$. Donner sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.

Solution:

Comme X et Y sont indépendantes on a avec $q = (1 - p)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} P(Y = n) \sum_{k \leq n} P(X = k) &= \sum_{n \geq 0} q^n p \sum_{k \leq n} q^k p \\
 &= \sum_{n \geq 0} q^n p^2 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= p \sum_{n \geq 0} q^n - q^{2n+1} \\
 &= p \sum_{n \geq 0} q^{2n} \\
 &= p \cdot \frac{1}{1 - q^2} \\
 &= (1 - q) \frac{1}{(1 - q)(1 + q)} \\
 &= \frac{1}{1 + q} \\
 &= \frac{1}{2 - p}
 \end{aligned}$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}$.

2. Calculer $P(Y = X)$. Donner sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.

Solution:

$$\sum_{n \geq 0} P(Y = n)P(X = n) = \sum_{n \geq 0} p^2 q^{2n} = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2 - p}$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{1}{3}$.

3. Montrer que $P(Y > X) = P(X > Y)$.

Solution:

$$P(Y > X) = P(Y \geq X) - P(Y = X) = \frac{1}{2-p} - \frac{p}{2-p} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Comme $2\frac{1-p}{2-p} + \frac{p}{2-p} = 1$, $P(Y > X) = P(X > Y)$.

On définit les variables aléatoires U et V par

$$U = \max(X, Y) \text{ et } V = \min(X, Y)$$

4. Pour tous $(u, v) \in \mathbb{N}$ Calculer $P(U \leq u, V \geq v)$.

Solution:

si $v \leq u$, alors :

$$P(U \leq u, V \geq v) = P(v \leq X \leq u, v \leq Y \leq u) = (q^v - q^{u+1})^2$$

5. Calculer les lois des variables aléatoires U et V .

Solution:

On a pour $u \geq 0$, $P(U \leq u) = P(U \leq u, V \geq 0) = (1 - q^{u+1})^2$
 et $P(U = u) = P(U \leq u) - P(U \leq u - 1) = p(2q^u - q^{2u(1+q)})$.

Par raisonnement similaire avec $u \rightarrow \infty$ on obtient :

$$P(V = v) = q^{2v}(q - q^2)$$

V suit une loi géométrique sur \mathbb{N} de paramètre $1 - q^2$.

6. On définit la variable aléatoire $W = U - V$. Déterminer la loi de W .

Exercice 14 :

Pour avoir son diplôme, un étudiant doit réussir les examens des N cours qui sont proposés, et obtenir ainsi les N unités de valeur correspondantes. On suppose que l'étudiant a une probabilité $p \in]0, 1[$ de réussir chacun des examens (toutes les tentatives sont supposées indépendantes). D'année en année, l'étudiant peut reporter les unités de valeurs obtenues, et il ne passe alors que les examens qu'il n'a pas réussis.

1. Pour $1 \leq i \leq N$, notons G_i le nombre d'essais nécessaires pour réussir l'examen du i -ième cours. Quelle est la loi de G_i ?

Solution:

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, P(G_i = n) = (1 - p)^{n-1}p$.

Remarque : on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, P(G_i \leq n) = \sum_{j=1}^n (1 - p)^{j-1}p = 1 - (1 - p)^n$.

2. On note X_n le nombre total d'unités obtenues pendant les n premières années (si $X_n = N$, alors $X_m = N$ pour $m \geq n$). Quelle est la loi de X_n ?

Solution:

$\forall m \in]0, N]$, l'évènement $(X_n = m)$ correspond au fait qu'exactly m examens ont été réussis et les autres non. Notons E_i l'évènement "l'examen i a été réussi pendant les n premières années" et F_i l'évènement contraire. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X_n = m) &= \sqcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N} P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_m} \cap_{k \notin \{i_j\}} F_k) \\ &= \sqcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N} P((G_{i_1} \leq n) \cap \dots \cap (G_{i_m} \leq n) \cap_{k \notin \{i_j\}} (G_k > n)) \\ &= \binom{N}{m} (1 - (1 - p)^n)^m (1 - p)^{n(N-m)} \end{aligned}$$

3. On suppose que l'étudiant ne peut passer les examens qu'au plus pendant 5 ans.
 (a) Quelle est la probabilité que l'étudiant n'obtienne pas son diplôme ?

Solution:

L'évènement "l'étudiant n'obtient pas son diplôme" correspond à l'évènement $X_5 < N$.

$$\begin{aligned} P(X_5 < N) &= \sum_{m=0}^{N-1} P(X_5 = m) \\ &= 1 - P(X_5 = N) \\ &= 1 - \binom{N}{N} (1 - (1 - p)^5)^N (1 - p)^{5(N-N)} \\ &= 1 - (1 - (1 - p)^5)^N \end{aligned}$$

- (b) Combien d'examens l'étudiant passera-t-il en moyenne ?

Solution:

On recherche l'espérance de la variable X_5 :

$$\begin{aligned} E(X_5) &= \sum_{m=0}^N mP(X_5 = m) \\ &= \binom{N}{m} (1 - (1-p)^5)^m (1-p)^{5(N-m)} \\ &= N(1 - (1-p)^5) \end{aligned}$$

Exercice 15 (Rumeur) :

Une information est transmise dans une population. Chaque individu transmet la bonne information avec probabilité p , la négation de l'information est transmise avec probabilité $1-p$. Soit p_n la probabilité que l'information soit correcte après n répétitions.

- Calculer la valeur p_n en fonction de p et de n .

Solution:

On note $q_n = 1-p_n$ la probabilité que l'information soit fautive après n répétitions. En utilisant la formule des probabilités totales, $p_n = pp_{n-1} + qq_{n-1} = p_{n-1}(2p-1) + (1-p)$. Par récurrence, on obtient : $p_n = \frac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$

- Calculer $\lim_n p_n$. Conclure.

Solution:

Si $p = 1$, l'information se transmet parfaitement : la limite est 1.

Si $p = 0$, l'information est niée à chaque transmission, elle alterne entre vraie et fautive : il n'y a pas de limite (comportement cyclique).

Sinon, $|2p-1| < 1$, et $\lim_n p_n = \frac{1}{2}$. À la limite, il y a équiprobabilité entre l'information et son contraire.

Exercice 16 :

Nous allons considérer un jeu de dés avec 4 dés à 20 faces chacun. Ces dés sont supposés non truqués. À chaque lancer, un nombre de points est attribué :

- Si tous les dés ont un résultat différent le nombre de points est nul.
- S'il existe une paire, un triplet ou un carré du nombre a , le nombre de points est égal à a .
- S'il existe deux paires du nombre a et b ($a \neq b$), le nombre de points est égal à $a + b$.

- Quel est l'espace de probabilité ? Quelle est la distribution de probabilité ?

Solution:

L'univers est : $\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}^4$.

La loi de probabilité est : $\forall (i, j, k, l) \in \Omega, P(i, j, k, l) = \frac{1}{20^4}$.

- Quelle est la probabilité de faire un score nul ?

Solution:

Pour faire un score nul il faut que tous les dés soit différents. La première approche consiste à compter toutes les configurations où les dés sont différents. Pour cela on fixe une valeur parmi 20 pour le premier dé puis 1 valeur parmi 19 pour le second... On obtient pour le nombre d'évènements à score nul :

$$\binom{20}{1} \binom{19}{1} \binom{18}{1} \binom{17}{1}$$

Puis l'on divise par le nombre total d'évènements et on obtient :

$$\frac{\binom{20}{1} \binom{19}{1} \binom{18}{1} \binom{17}{1}}{20^4} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{20^3} = \frac{2907}{4000} = 0.72675$$

3. Soit a entre 1 et 20. Déterminer la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.

Solution:

On reconnaît une distribution binomiale, pour chacun des dés on a $\frac{1}{20}$ chance d'obtenir a . Le résultat est donc :

$$\binom{4}{k} \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{4-k}$$

4. Soit X_a la variable aléatoire valant 1 si a apparaît au moins deux fois dans les lancers et 0 sinon. Déterminer la loi suivie par X_a et exprimer le gain du jeu à l'aide de ces variables. Calculer l'espérance du gain.

Solution:

La loi suivie par X_a est une Bernoulli de paramètre p égal à :

$$\begin{aligned} p &= \binom{4}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{20}\right)^3 \frac{19}{20} + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{20}\right)^4 \\ &= \frac{1}{20^4} (6 \cdot 19^2 + 4 \cdot 19 + 1) \\ &= \frac{2243}{160000} \end{aligned}$$

Le gain G s'écrit :

$$G = \sum_{a=1}^{20} a X_a$$

L'espérance de G est $E(G) = \sum_{a=1}^{20} a E(X_a)$ en utilisant la linéarité de l'espérance. L'espérance d'un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p est p . On obtient pour l'espérance de G :

$$E(G) = \sum_{a=1}^{20} a \frac{2243}{160000} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 2243}{2 \cdot 160000} = \frac{47103}{16000} = 2.9439375$$

5. Quelle est la probabilité de faire exactement 8 points ?

Solution:

Pour faire exactement 8 points on peut soit faire apparaître plus de deux 8 dans un lancé sans qu'il n'y ait d'autre paire, ce qui arrive avec probabilité $X_8 - \frac{6 \cdot 19}{20^4}$.

Ou l'on peut le faire avec deux paires de nombre a et b tel que $a + b = 8$. En fixant $a < b$ il existe seulement trois paires : (1, 7), (2, 6) et (3, 5) chacune de ces paires possède $\binom{4}{2}$ permutations, leur probabilité est donc : $\frac{3 \cdot 6}{20^4}$.

Le résultat final est :

$$P(G = 8) = X_8 - \frac{6 \cdot 19}{20^4} + \frac{3 \cdot 6}{20^4} = \frac{2147}{160000} = 0.01341875$$

6. On autorise maintenant de relancer une fois entre 0 et 4 dés. Quelle est la meilleure stratégie après avoir obtenu 11 - 7 - 2 - 2 ?

Solution:

Les différentes stratégies possibles sont :

- On relance tous avec une espérance de gain de $\frac{47103}{16000} \approx 2.94$.
- On relance que le 7 le gain est $2 + 11 \frac{1}{20} = \frac{51}{20} = 2.55$.
- On relance que le 11 le gain est $2 + 7 \frac{1}{20} = \frac{47}{20} = 2.35$.
- On relance le 7 et le 11 le gain est $2 + \frac{21}{40} - \frac{2}{20^2} = \frac{63}{25} = 2.52$.
- On relance que les 2 le gain est $\frac{21}{40} + 11 \frac{2 \cdot 19 - 1}{20^2} + 7 \frac{2 \cdot 19 - 1}{20^2} + 19 \frac{2}{400} = \frac{57}{25} = 2.28$.
- On relance les 2 et le 7, on commence par calculer le gain associé au trois lancés de dés : soit Y_a la variable aléatoire valant 1 si il existe au moins 2 a dans trois lancés et 0 sinon.

$$Pr(Y_a = 1) = \binom{3}{2} \frac{1}{20^2} \frac{19}{20} + \binom{3}{3} \frac{1}{20^3} = \frac{29}{4000}, E\left(\sum_{a=1}^{20} a Y_a\right) = \frac{609}{400}$$

Le gain associé aux paies formées entre le 11 déjà présent et le lancé des trois dés est :

$$11 \binom{3}{1} \frac{1}{20} \frac{19^2}{20^2} = \frac{11913}{8000}$$

Le gain total est : $\frac{609}{400} + \frac{11913}{8000} = \frac{24093}{8000} \approx 3.01$

La dernière stratégie est la meilleure, certaines stratégies n'ont pas été considérées, elle peuvent être facilement éliminées.

7. Quelle est la meilleure stratégie après avoir obtenu 4 nombre différents ?

Solution:

On connaît le gain si on relance les quatre dés. Si l'on garde la plus grande valeur que l'on appelle a et que l'on relance les trois autres. On obtient le gain G' suivant :

$$G' = \frac{609}{400} + \frac{1083 \cdot a}{8000}$$

$G' > G$.

Pour $a \geq 11$ il faut garder au moins le plus grand dés. Si l'on garde les deux plus grande valeur a et b , le gain G'' est alors

$$G'' = \frac{21}{40} + a \frac{2 \cdot 19 - 1}{20^2} + b \frac{2 \cdot 19 - 1}{20^2} + \frac{2(a+b)}{20^2} = \frac{210 + 39(a+b)}{400}$$

$$G'' > G'.$$