

## Encore un peu d'axiome du choix

### Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble des sous-ensembles finis de  $\mathbb{N}$  est dénombrables.

#### Solution:

1. The family of finite sets of  $\mathbb{N}$  is equal to  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([n])$ , which is a countable union of finite sets.
2. Build a 1-1 function from family of all the finite sets of  $\mathbb{N}$  :

$$f(A) = \sum_{k \in A} 2^k$$

$f(A) \in \mathbb{N}$  since  $A$  is finite, and for  $A \neq B$  we have  $f(A) \neq f(B)$ .

### Exercice 2 :

En supposant l'axiome du choix dénombrable, montrer que tout ensemble infini a un sous-ensemble infini dénombrable.

#### Solution:

Soit  $E$  un ensemble infini. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $B_n$  l'ensemble des suites injectives  $\langle a_i : i < n \rangle$  dans  $E$  de longueur  $n$ .

- Chaque  $B_n$  est non vide : Si un  $B_n$  est vide, alors  $E$  est équipotent à un ordinal fini  $i < n$ , i.e. le plus grand  $i$  tel que  $B_i$  est non vide.
- Soit  $B := \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . C'est un ensemble dénombrable. Soit  $f$  une fonction de choix pour  $B$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $c_n := f(B_n)$ . Soit  $S := \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists i < n (x = c_{n,i})\}$ .
  - $S$  est infini car il contient des ensembles finis arbitrairement grands.
  - Pour tout  $x \in S$ , soit  $(n_x, i_x)$  le plus petit couple pour l'ordre lexicographique tel que  $c_{n_x, i_x} = x$ . On pose  $x < y$  si  $(n_x, i_x) <_{lex} (n_y, i_y)$ ; soit  $g(x) := |\{y \in S \mid y < x\}|$ , bijective.

## Des relations, des ordres

### Exercice 3 :

Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, i_0, F)$  un automate déterministe complet, où  $Q$  représente l'ensemble des états,  $\Sigma$  l'alphabet,  $\delta$  la fonction de transitions,  $i_0$  l'état initial et  $F$  l'ensemble des états finals. Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $Q$  telle que :

- Pour tous états  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{A}$  tels que  $p \sim q$ , pour tout  $a$  dans  $\Sigma$ ,  $\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$ .
- Si  $p \in F$ , pour tout état  $q$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $p \sim q$ ,  $q$  est dans  $F$ .

Pour tout état  $p$ , on note  $C(p)$  sa classe d'équivalence.

1. (a) Démontrer qu'on définit un automate déterministe complet en posant :

$$\mathcal{A}_\sim = (Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, C(i_0), F/\sim)$$

où  $Q/\sim$  est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation  $\sim$ ,  $\delta_{\sim}(C(p), a) = C(\delta(p, a))$  (justifier que cela a un sens), et  $F/\sim$  est l'ensemble des classes d'équivalence des états de  $F$ .

- (b) Démontrer que  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_{\sim})$ .
2. On définit alors pour tout entier  $n$  la relation d'équivalence sur  $Q$  : pour tous états  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{A}$ ,  $p \sim_n q$  si, pour tout mot  $w$  de longueur inférieure à  $n$ ,  $\delta(p, w) \in F$  si et seulement si  $\delta(q, w) \in F$ . Montrer que :
  - (a) Pour tous états  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{A}$ ,  $p \sim_{n+1} q \Rightarrow p \sim_n q$ .
  - (b) Il existe  $n$  tel que  $\sim_{n+1} = \sim_n$ .
3. En déduire un algorithme de calcul de l'automate minimal de  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 4 :**

Soit  $(R_i)_{i \in I}$  une famille de relations binaires sur un ensemble  $E$ . Soit  $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ . Autrement dit,  $xRy$  ssi  $xR_iy$  pour tout  $i \in I$ .

Les propriétés suivantes sont-elles préservées par intersection ? (Non / Oui, dès que l'une des  $R_i$  a la propriété / Oui, si toutes les  $R_i$  ont la propriété.) Ne surtout pas hésiter à prouver ce qu'on affirme.

	non	oui, si UNE des $R_i$	oui, si TOUTES les $R_i$
réflexivité			
symétrie			
transitivité			
totalité			
irréflexivité			
antisymétrie			
asymétrie			
trichotomie			

**Exercice 5 :**

Soit  $E$  un ensemble avec un ordre partiel  $\leq$ . On rappelle qu'une *antichaine* est un sous-ensemble de  $E$  dont tous les éléments sont incomparables.

- On considère  $\mathbb{N}^2$  avec l'ordre produit  $((a, b) \leq (x, y) \iff a \leq x \wedge b \leq y)$ .
  - Exhiber qu'une antichaine de cardinal  $n$ , pour tout  $n > 1$ .
  - Peut-on trouver une antichaine infini ?
- (Récurrence bien fondée sur  $\mathbb{N}^2$ ) Soit  $P$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^2$ . En supposant que pour tout  $t \in \mathbb{N}^2$ ,  $\{u \mid u < t\} \subset P$  implique  $t \in P$ , montrer que  $P = \mathbb{N}^2$ .
- Montrer que l'ensemble des mots  $\Sigma^*$  avec l'ordre de sous-mots ( $w_1 < w_2$  ssi il existe  $u, v \in \Sigma^*$  tels que  $w_2 = uw_1v$ ), a une antichaine infinie.

**Exercice 6 :**

Soit  $E$  un ensemble avec un ordre partiel noté  $\preceq$ . On dit que  $\preceq$  est un beau préordre (*well quasi-order*, ou wqo) si pour toute suite d'éléments de  $E$ , on peut extraire une suite infini croissante ; c'est-à-dire que  $\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ , il existe une sous-suite croissante d'indices  $i_0 < i_1 < \dots < i_n < \dots$  telle que  $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante :  $x_{i_0} \preceq x_{i_1} \preceq \dots \preceq x_{i_n} \preceq \dots$ .

- Montrer que si l'ordre  $\preceq$  est total, alors c'est un wqo si et seulement si tout sous-ensemble non vide de  $E$  a un plus petit élément.
- Donner un exemple d'un ordre total qui n'est pas un wqo.
- Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
  - L'ensemble ordonné  $(E, \preceq)$  est un wqo.
  - Pour toute suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , on peut trouver  $i < j$  tels que  $x_i \preceq x_j$ .
  - (i) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans  $E$ ,  
(ii) Il n'y a pas d'antichaine infini.
- Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble (partiellement) ordonné, on dit qu'il est bien fondé s'il n'y a de suite infinie décroissante. Supposons que  $E$  est dénombrable. Montrer que l'ordre est un wqo si et seulement si l'ensemble de toutes les antichaines est dénombrable.
- Lemme de Dickson : Soit  $(E_1, \preceq_1)$  et  $(E_2, \preceq_2)$  deux wqo. Montrer que  $(\preceq_1, \preceq_2)$  est un wqo pour  $E_1 \times E_2$ .

6. Lemme de Higman : Soit  $\preceq$  un wqo sur  $\Sigma$ . On définit sur  $\Sigma^*$  la relation suivante :

$$a_1 \dots a_m \leq_{sw} b_1 b_2 \dots b_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \\ a_1 \preceq b_{i_1} \wedge a_2 \preceq b_{i_2} \dots a_m \preceq b_{i_m} \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $\leq_{sw}$  est un ordre (*sw* pour *subword*).
- (b) Montrer que  $\leq_{sw}$  est un wqo.
7. Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble (partiellement) ordonné, et  $F \subset E$  tel que pour tout  $y \in E$ , s'il existe  $x \in F$  tel que  $x \preceq y$ , alors  $y \in F$  (on dit que l'ensemble  $F$  est fermée par le haut).
- (a) Soit  $(E, \preceq)$  un wqo. Montrer que toute suite croissante d'ensembles fermée par le haut est stationnaire; c'est-à-dire que étant donné  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$ , il existe  $i$  tel que pour tout  $j > i$ ,  $F_i = F_j$ .
- (b) Montrer que si  $F$  est fermée par le haut, il existe une suite finie d'éléments  $(x_i)_{i \leq n}$  dans  $F$  telle que  $F = \cup_{i \leq n} \{y \in E, x_i \preceq y\}$ .

### Exercice 7 (Théorème de Dilworth) :

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble fini (partiellement) ordonné. Soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On note  $\text{Max}(F)$  l'ensemble de ses éléments maximaux.

- Montrer que si  $F$  est non vide,  $\text{Max}(F)$  est un sous-ensemble non vide de  $F$ .
- Montrer que si  $F$  est non vide,  $\text{Max}(F)$  est une antichaine maximale (au sens de l'inclusion) dans  $F$ .

On peut maintenant prouver par récurrence sur  $|E|$  le **théorème de Dilworth** : Étant donné  $k$  le cardinal maximal d'une antichaine de  $E$ , on a que  $E$  est une union disjointe de  $k$  chaînes.

- Prouver le théorème pour  $k = 1$ .
- Supposons  $k > 1$ . Soit  $z \in \text{Max}(E)$  et  $F = E \setminus \{z\}$ . Posons  $l$  le cardinal maximal d'une antichaine de  $F$ . Par hypothèse de récurrence,  $F$  est une union disjointe de chaînes  $C_1, \dots, C_l$ .
  - Donner un majorant de  $k$  en fonction de  $l$ .
  - Soit  $C$  une antichaine de  $E$ . Que peut-on dire de  $C \cap C_i$  pour  $i \leq l$ ?
  - Soit  $i \leq l$ . Notons  $D_i$  l'ensemble des éléments de  $C_i$  présents dans une antichaine de cardinal  $l$  dans  $F$ .
    - Montrer que  $D_i$  n'est pas vide.
    - Notons  $y_i$  l'élément maximal de  $D_i$ . Montrer que  $\{y_1, \dots, y_l\}$  est une antichaine de  $F$ .
    - Conclure, dans l'hypothèse où pour tout  $i$ ,  $z$  est incomparable à  $y_i$ .
    - Supposons qu'il existe un  $i$  tel que  $z$  soit comparable à  $y_i$ . Soit  $C' = \{z\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq y_i\}$ . Montrer que  $C'$  est une chaîne et que  $F \setminus C'$  ne contient pas d'antichaine de cardinal  $l$ . Conclure.