

Hauteur d'une relation et récurrence bien fondée

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E . On définit :

- $E_0 := \emptyset$;
- $E_{\alpha+1} := \{y \in E \mid Ry \subseteq E_\alpha\}$;
- Si α est limite non nul, $E_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$.

On rappelle que :

- $E_0 = \bigcup_{\beta < 0} E_\beta$ et $E_1 := \{y \in E \mid Ry = \emptyset\}$.
- pour tout ordinal α , on a $E_\alpha \subseteq E_{\alpha+1}$.
- pour tous ordinaux $\alpha < \beta$, on a $E_\alpha \subseteq E_\beta$.
- il existe un ordinal θ tel que $E_{\theta+1} = E_\theta$.
- $E_{\theta+1} = E_\theta$ implique pour tout $\alpha \geq \theta$, $E_\alpha = E$.

Le plus petit θ tel que $E_\theta = E_{\theta+1}$ est noté $\lambda(R)$ et est appelé la hauteur de R .

Exercice 1 :

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E . Soit α un ordinal et R_α la restriction de R à E_α ($= E_\alpha^R$). Montrer que :

- Si $\beta \leq \alpha$, alors $(E_\alpha)_\beta^{R_\alpha} = E_\beta$.
- Si $\alpha \leq \beta$, alors $(E_\alpha)_\beta^{R_\alpha} = E_\alpha$.
- Si $x \in E_\alpha$, alors $R_\alpha x = Rx$.
- Si $\alpha < \lambda(R)$, alors $\lambda(R_\alpha) = \alpha$.

Exercice 2 :

Soient R une relation bien fondée sur un ensemble E , un ensemble A , et une fonction $g: E \times (Rx \rightarrow A) \rightarrow A$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f: E \rightarrow A$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x, f|_{Rx})$. (Indice : on pourra raisonner par récurrence sur la hauteur λ de R)

Cardinaux et Axiome du Choix

Exercice 3 :

Supposons que tout ensemble soit bien ordonnable. Montrer que l'axiome du choix est vrai.

Exercice 4 :

Montrer le théorème de Cantor-Schröder-Berstein : s'il existe une fonction injective de A dans B et une fonction injective de B dans A , alors il existe une bijection de A dans B .

Solution:

Sans perte de généralité, on suppose A et B disjoints. Pour tout $x \in A \cup B$, on définit une suite finie ou infinie comme suit :

- $x_0 := x$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si x_n est défini et dans
 - $g[B]$, alors $x_{n+1} := g^{-1}(x_n)$.
 - $f[A]$, alors $x_{n+1} := f^{-1}(x_n)$.

Soit A_B (resp. B_B) l'ensemble des $x \in A$ (resp. $x \in B$) tels que la suite (x_n) termine dans B . (Pour tout $x \in (A \cup B) \setminus (A_B \cup B_B)$, la suite (x_n) termine dans A ou est infini.)

Pour tout $x \in B_B$, si (x_n) est notée $xx_1x_2, \dots, x_{k(x)}$, alors la suite $(g(x)_n)$ associée à $g(x)$ est $g(x)xx_1x_2, \dots, x_{k(x)}$, donc $g(x) \in A_B$. L'application

$$g' : B_B \rightarrow A_B \\ x \mapsto g(x)$$

est donc bien définie. Elle est injective car g l'est. Elle est surjective car pour tout $y \in A_B$ la suite (y_n) termine dans B (par définition de A_B), donc $g(y_1) = y$. De manière similaire, l'application

$$f' : A \setminus A_B \rightarrow B \setminus B_B \\ x \mapsto f(x)$$

est bien définie et bijective. Ainsi, l'application qui à x associe $f(x)$ si $x \in A \setminus A_B$ et $g^{-1}(x)$ si $x \in A_B$ est bijective.

Exercice 5 :

Soit α un ordinal et B un ensemble d'ordinaux tel que pour tout $\gamma < \alpha$, il existe $\beta \in B$ tel que $\gamma < \beta$. Montrer que $\alpha \leq \sup B$.

Solution:

- If α is a successor ordinal, there exists an ordinal δ such that $\alpha = \delta + 1$. Then $\delta < \alpha$, so by assumption on B , there exists $\beta \in B$ such that $\delta < \beta$, so $\alpha = \delta + 1 \leq \beta$, and $\alpha \leq \sup B$.
- If α is a limit ordinal, $\alpha = \sup \alpha = \sup_{\delta < \alpha} \delta$. By assumption for all $\gamma < \alpha$, there exists $\beta \in B$ such that $\gamma < \beta$, so $\gamma < \sup B$.

Exercice 6 :

Supposons l'axiome du choix. Montrer que s'il existe une surjection de A dans B , alors il existe une injection de B dans A .

Solution:

Let $f : A \rightarrow B$ be surjective, so $f^{-1}[y] \neq \emptyset$ for all $y \in B$. Let $E := \{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$. Note that for $y, z \in B$ if $y \neq z$ then $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) = \emptyset$. By AC, let h be a choice function for E , i.e. $h(X) \in X$ for all $X \in E$. Let $g : B \rightarrow A$ be defined by $g(y) := h(f^{-1}(y))$. If $g(y) = g(z)$ then $h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(z))$, so $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) \neq \emptyset$, so $y = z$.

Exercice 7 :

Supposons l'axiome du choix. S'il existe une surjection de A dans B et une surjection de B dans A , il existe une bijection de A dans B .

Exercice 8 :

Supposons l'axiome du choix. Montrer que toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Solution:

Soit E un ensemble infini dénombrable d'ensembles infinis dénombrables. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ une bijection. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit B_n l'ensemble des bijections de $f(n)$ dans \mathbb{N} . Soit g une fonction de choix pour $B := \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $x \in \cup E$, soit $h(x) := (i, j)$ où $i := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in f(n)\}$ et $j := (g \circ f(i))(x)$. Donc j est l'indice d'occurrence de x dans le premier ensemble de E où x apparaît. Ainsi h est injective. Or $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, donc $\cup E$ aussi.

Exercice 9 :

Soit R une relation bien fondée sur un ensemble E . Montrer qu'il n'existe pas de ω -suite $\langle a_n : n < \omega \rangle$ telle que $a_{n+1} R a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

Si une telle suite existe, soit $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des éléments de la suite. A est non vide, mais n'a pas d'élément minimal : pour tout a_n il existe un élément plus petit, par exemple a_{n+1} .

Exercice 10 :

1. $\kappa < 2^\kappa$.
2. Si $\kappa < \lambda$ alors $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
3. Si $0 < \lambda < \mu$, alors $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
4. $\kappa^0 = 1$; $1^\kappa = 1$; $0^\kappa = 0$ si $\kappa > 0$.
5. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
6. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
7. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Exercice 11 :

1. Soient E et F deux ensembles dénombrables. Montrer que $E \cup F$ est dénombrable.

Solution:

Let f (resp. g) be 1-1 functions from E (resp. F) to \mathbb{N} . We construct a new function :

$$E \cup F \mapsto \mathbb{N}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 2f(x) & \text{si } x \in E \\ 2g(x) + 1 & \text{si } x \in F \setminus E \end{cases}$$

It is also 1-1 and hence $E \cup F$ is countable.

2. Soient E_1, \dots, E_n des ensembles dénombrables. Montrer que $\prod_{i=1}^n E_i$ est dénombrable.

Solution:

Denote by f_i a 1-1 function from E_i to \mathbb{N} . We construct a new function :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n E_i &\mapsto \mathbb{N}^n \\ x &\rightarrow (f_i(x))_{1 \leq i \leq n} \end{aligned}$$

Since \mathbb{N}^n is countable, so is $\prod_{i=1}^n E_i$.

Exercice 12 :

Montrer que l'ensemble des sous-ensembles finis de \mathbb{N} est dénombrables.

Solution:

1. The family of finite sets of \mathbb{N} is equal to $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([n])$, which is a countable union of finite sets.

2. Build a 1-1 function from family of all the finite sets of \mathbb{N} :

$$f(A) = \sum_{k \in A} 2^k$$

$f(A) \in \mathbb{N}$ since A is finite, and for $A \neq B$ we have $f(A) \neq f(B)$.