

**Exercice 1 :**

1. Montrer que l'inclusion est réflexive, antisymétrique et transitive.
2. Montrer que  $\{a, b\} = \{b, a\}$ .
3. Montrer que  $(a, b) = (c, d)$  si et seulement si  $a = c$  et  $b = d$ .
4. Montrer que  $(a, b, c) = (a', b', c')$  si et seulement si  $a = a'$  et  $b = b'$  et  $c = c'$ .
5. Dans l'axiome de l'union  $\forall a \exists b \forall c (c \in b \Leftrightarrow \exists d (c \in d \wedge d \in a))$ , montrer que  $b$  est unique.
6. Montrer que  $\cup \emptyset = \emptyset$ .
7. Montrer que  $a \cup b = b \cup a$ .
8. Montrer que  $(\cup a) \cup (\cup b) = \cup (a \cup b)$ .
9. Montrer que  $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{a, c, b\}$ .
10. Montrer que si  $a \neq \emptyset$  ou  $b = \emptyset$ , alors  $a \subseteq b$  implique  $\cap b \subseteq \cap a$ . La réciproque est-elle vraie ?
11. Exhiber  $a$  et  $b$  tels que  $(\cap a) \cap (\cap b) \neq \cap (a \cap b)$ .
12. Exhiber  $a$  et  $b$  tels que  $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ .

**Exercice 2 :**

Montrer que :

1.  $x \in A$  si et seulement si  $\{x\} \subseteq A$ .
2. Si  $x$  est transitif,  $x \cup \{x\}$  l'est également.
3. Si  $x \cup \{x\} \subseteq x$ , alors  $x \in x$ .

**Exercice 3 :**

Soit  $A$  un ensemble inductif et  $B := \{x \in A \mid x \subseteq A\}$ . Montrer que :

1.  $B$  est un ensemble.
2.  $B$  est inductif.
3. L'ensemble  $\mathbb{N}$  défini dans le cours est transitif.
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$ .

**Exercice 4 :**

Soit  $A$  un ensemble inductif et  $C := \{x \in A \mid \text{Trans}(x)\}$ . Montrer que :

1.  $C$  est un ensemble.
2.  $C$  est inductif.
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  est transitif.

**Exercice 5 :**

Soit  $A$  un ensemble inductif et  $D := \{x \in A \mid \text{Trans}(x) \wedge \neg(x \in x)\}$ . Montrer que :

1.  $D$  est un ensemble.
2.  $D$  est inductif.
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n \notin n$  et  $\text{succ}(n) := n \cup \{n\} \neq n$ .

**Exercice 6 :**

Montrer que  $\mathbb{N}$  est  $T$ -infini, autrement dit, il n'est pas  $T$ -fini.

**Exercice 7 :**

1. Soit  $x$  un ensemble. Écrire une formule « tout ensemble  $y$  non vide et inclus dans  $x$  a un élément minimal pour la relation d'appartenance  $\in$  ».
2. Soit  $A$  un ensemble inductif et  $E := \{x \in A \mid \text{Trans}(x) \wedge \phi(x)\}$ . Montrer que  $E$  est un ensemble inductif.
3. Montrer que tout  $X \subseteq \mathbb{N}$  non vide a un élément  $\in$ -minimal.

**Exercice 8 :**

Soit  $A$  un ensemble inductif et  $F := \{x \in A \mid x = \emptyset \vee \exists y \in A (x = y \cup \{y\})\}$ . Montrer que :

1.  $F$  est un ensemble inductif.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $n = \emptyset = 0$  ou il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n = m \cup \{m\} = \text{succ}(m)$ .

**Exercice 9 :**

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  tel que  $\emptyset \in A$  et tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \in A$  alors  $\text{succ}(n) \in A$ . Montrer que  $A = \mathbb{N}$ .

**Exercice 10 :**

Montrer que tout  $n \in \mathbb{N}$  est  $T$ -fini.

**Exercice 11 :**

Un ensemble  $A$  est dit fini s'il existe une bijection entre  $A$  et un  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Écrire une formule  $\phi(A)$  disant que  $A$  est un ensemble fini.
2. Étant donné deux ensembles  $A$  et  $B$  en bijection. Montrer que si  $A$  est  $T$ -fini,  $B$  l'est également.