

# Calculabilité

## TD n° 5

Louis Lemonnier

lemonnier@lsv.fr

20 octobre 2022

Rappel : l'ensemble des fonctions récursives primitives et le plus petit ensemble de fonctions  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  :

- contenant  $0 : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $() \mapsto 0$ ,
- contenant  $Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $n \mapsto 0$ ,
- contenant  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $n \mapsto n + 1$ ,
- stable par composition : si  $g_1, \dots, g_m : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  et  $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$  sont récursives primitives, alors  $Comp_m(f, g_1, \dots, g_m) : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\vec{n} \mapsto f(g_1(\vec{n}), \dots, g_m(\vec{n}))$  est récursive primitive.
- stable par récursion primitive : si  $b : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  et  $e : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$  sont récursives primitives, alors  $f := Prim(b, e) : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$  définie comme suit est récursive primitive :
  - $f(\vec{m}, 0) := b(\vec{m})$
  - $f(\vec{m}, n + 1) := e(\vec{m}, n, f(\vec{m}, n))$

## 1 Fonctions récursives

### Exercice 1 :

Montrer que :

- La factorielle,
- la négation  $\neg$ ,
- la conjonction  $\wedge$ ,
- la disjonction  $\vee$ ,
- la fonction prédécesseur,
- la différence entière,
- le prédicat  $\leq$ ,
- et le prédicat d'égalité  $=$

sont primitifs récursifs.

### Exercice 2 :

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives est clos par maximisation bornée ; c'est-à-dire que pour toutes  $\psi, \xi$  récursives primitives telles que

$$\forall \vec{n}, \exists m \leq \psi(\vec{n}); \xi(\vec{n}, m) = 0$$

la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\varphi(\vec{n}) = \max_{m \leq \psi(\vec{n})} (\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

est récursive primitive.

### Exercice 3 :

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives est clos par minimisation bornée.

## 2 Pour la semaine prochaine

### Exercice 4 :

Prouver par réduction l'indécidabilité de ces deux problèmes.

1. **Donnée :** le code  $\langle M \rangle$  d'une machine de Turing,  
**Question :**  $M$  s'arrête-t-elle sur le mot vide ?
2. **Donnée :** les codes  $\langle M \rangle$  et  $\langle M' \rangle$  de deux machines de Turing,  
**Question :**  $L(M) = L(M') ?$