

# Calculabilité

## TD n° 4

Louis Lemonnier  
lemonnier@lsv.fr

13 octobre 2022

## 1 Réduisons

### Exercice 1 : Est-ce décidable ?

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. Si c'est le cas, donnez (l'idée de) la machine de Turing décidant le langage et sinon, faites une preuve **par réduction**.

1. **Donnée** : le code  $\langle M \rangle$  d'une machine de Turing,  
**Question** :  $M$  s'arrête-t-elle sur le mot vide ?
2. **Donnée** : le code  $\langle M \rangle$  d'une machine de Turing,  
**Question** :  $M$  s'arrête-t-elle sur au moins une donnée ?
3. **Donnée** : les codes  $\langle M \rangle$  et  $\langle M' \rangle$  de deux machines de Turing,  
**Question** :  $L(M) = L(M')$  ?
4. **Donnée** : le code  $\langle M, w \rangle$  d'une machine de Turing et d'un mot  $w$  et un entier  $n$  (en base 2),  
**Question** :  $M$  accepte-t-elle  $w$  après au plus  $n$  transitions ?
5. **Donnée** : le code  $\langle M \rangle$  d'une machine de Turing,  
**Question** :  $M$  calcule en temps polynomial (i.e.  $M$  termine en temps polynomial) ?
6. **Donnée** : les codes  $\langle M \rangle$  d'une machine de Turing et le code  $\langle M' \rangle$  d'une machine de Turing qui s'arrête pour tout mot  $w$  en au plus  $2 \cdot |w|$  transitions,  
**Question** : Pour tout mot  $w$ ,  $M(w) = M'(w)$  ?

### Exercice 2 : Automates linéairement bornés

Un *automate linéairement borné* est une machine de Turing qui lorsqu'elle lit un blanc, écrit un blanc et se déplace vers la gauche.

1. Montrer que le problème de l'arrêt des automates linéairement bornés est décidable.
2. Montrer que le problème de l'arrêt universel des automates linéairement bornés est indécidable :  
**Donnée** :  $\langle M \rangle$  où  $M$  est un automate linéairement borné,  
**Question** : Est-ce que  $M$  s'arrête sur toute donnée ?

**Exercice 3 : Systèmes de réécriture**

Un système de réécriture de mots sur l'alphabet  $\Sigma$  est donné par un ensemble fini de couples  $(u, u') \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ . La relation de réécriture associée est  $\rightarrow_R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  définie par

$$w \rightarrow_R w' \text{ ssi } \exists (u, u') \in R. \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*. w = w_1 u w_2 \wedge w' = w_1 u' w_2$$

La relation de réduction  $\rightarrow_R^*$  est la clôture réflexive transitive de la relation de réécriture. Par exemple, avec

$$R = \{(c, abaca), (c, bcbabab), (aca, d), (bcb, d), (ada, d), (bdb, d)\}$$

on a  $c \rightarrow_R^* d$  :

$$\begin{aligned} \bar{c} &\rightarrow_R aba\bar{c}a \rightarrow_R abab\bar{c}bababa \rightarrow_R ababab\bar{a}c\bar{a}bababa \rightarrow_R ababab\bar{d}bababa \\ &\rightarrow_R ababab\bar{d}ababa \rightarrow_R abab\bar{d}baba \rightarrow_R ab\bar{a}d\bar{a}ba \rightarrow_R ab\bar{d}ba \rightarrow_R \bar{a}d\bar{a} \rightarrow_R \bar{d} \end{aligned}$$

Montrer que le problème d'*accessibilité* est indécidable :

**Donnée:** un système de réécriture  $R$  et deux mots  $u, v \in \Sigma^*$  ;

**Question:** est-ce que  $u \rightarrow_R^* v$  ?

**2 Cadeau****Exercice 4 : Fonctions calculables et langages rékursifs**

Donner une fonction calculable dont l'image n'est pas réursive.