

# Calculabilité

## TD n° 2

Louis Lemonnier  
lemonnier@lsv.fr

29 septembre 2022

### Exercice 1 : Palindromes sur 2 rubans

Montrer qu'il existe une machine de Turing sur 2 rubans qui reconnaît le langage des palindromes en temps linéaire.

### Exercice 2 : Clôture des langages rékursifs

1. Montrer que la classe des langages rékursifs est close par intersection, union et complémentaire.
2. Montrer que la classe des langages rékursivement énumérables est close par intersection et union.

### Exercice 3 : Fonctions calculables et langages rékursivement énumérables

Soit  $f$  une fonction calculable. Montrer que l'image de  $f$  est un langage rékursivement énumérable.

### Exercice 4 : Caractérisation des langages rékursivement énumérables

Montrer que  $L$  est un langage rékursivement énumérable si et seulement si il existe une machine de Turing  $M$  à  $k$  rubans et un état distingué  $q_e$  tels que :

$$q_0, (\epsilon, \$), \dots, (\epsilon, \$) \vdash_M^* q_e, (\epsilon, \$w'_0), \dots, (\epsilon, \$w'_{k-2}), (\epsilon, \$w) \text{ ssi } w \in L$$

### Exercice 5 : Image de langages rékursivement énumérables

Montrer que, si  $f$  est calculable et  $L$  est rékursivement énumérable, alors  $f(L)$  est rékursivement énumérable.

**Exercice 6 : États finaux**

Une machine de Turing avec états finaux (MTF) est presque comme une MT du cours, mais il n'y a pas d'état acceptant ou rejetant. Un mot en entrée est accepté s'il existe un calcul maximal qui termine dans un état final, rejeté sinon. Un langage est MTF-semi-décidable s'il existe une MTF qui accepte exactement ses mots. Si en plus cette MTF ne permet de calcul infini sur aucune entrée, le langage est MTF-décidable. La fonction associée à une MTF a pour domaine le langage reconnu et pour valeur le plus grand préfixe sans blanc sur le ruban au moment de l'arrêt. Cette fonction est dite MTF-sem-calculable. Si son domaine est MTF-décidable, elle est dite MTF-calculable.

1. Un langage est semi-décidable ssi il est MTF-semi-décidable.
2. Un langage est décidable ssi il est MTF-décidable.
3. Une fonction est semi-calculable ssi elle est MTF-semi-calculable.
4. Une fonction est calculable ssi elle est MTF-calculable.

**Exercice 7 : Automate à deux piles**

Un automate à deux piles est un tuple  $(Q, q_0, \Sigma, \delta, \perp)$ , où  $\perp \in \Sigma$  et  $Q = Q_1 \uplus Q_2$  et  $\delta : \subseteq Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma^*$  est une fonction partielle.

Une configuration est un triplet  $(q, w, w')$  où  $w, w' \in \Sigma^*$ . Une configuration de départ est de la forme  $(q_0, \perp, w\perp)$ , où  $w \in (\Sigma \setminus \perp)^*$  est appelé le mot d'entrée.

Une étape de calcul est de la forme  $(q, aw, w') \vdash (q', \alpha w, w')$  si  $q \in Q_1$  et  $\delta(q, a) = (q', \alpha)$  ou de la forme  $(q, w, bw') \vdash (q', w, \beta w')$  si  $q \in Q_2$  et  $\delta(q, b) = (q', \beta)$ .

Le mot  $w$  est reconnu par l'automate si en partant de  $(q_0, \perp, w\perp)$  on arrive à une configuration de la forme  $(q, \epsilon, w')$ , i.e. la première pile est vide.

Un langage est ADP-semi-décidable si ses mots sont reconnus par un ADP ; ADP-décidable si en plus il n'y a pas de calcul infini. Pareil pour les fonctions, dont la valeur est donnée par la deuxième pile au moment où la première se vide.

Montrer l'équivalence avec les langages et les fonctions (semi)-calculables.