

Calculabilité

TD n° 1

Louis Lemonnier

lemonnier@lsv.fr

22 septembre 2022

Exercice 1 : Machines de Turing

On prendra soin de prouver formellement une des trois.

1. Construire une machine de Turing décidant le langage des palindromes.
2. Construire une machine de Turing calculant $n + 1$, pour n donné en binaire.
3. Construire une machine de Turing qui accepte un mot binaire w s'il contient au moins autant de 0 que 1 et rejette sinon.

Exercice 2 : Questions existentielles

Parmi les trois fonctions suivantes, deux sont calculables (donner les machines de Turing correspondantes), et le problème de calculabilité de la dernière fonction est un problème ouvert. Lesquelles ?

$$f_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{si l'hypothèse de Riemann est vérifiée,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$f_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent la sous-séquence } 1^n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$f_3(n) = \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent} \\ & \text{une sous-séquence maximale de 1 de longueur } n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3 : Deux états

1. Montrer que toute fonction calculable est calculable (à codage près) par une machine de Turing sur l'alphabet $\{0, 1, B, \$\}$.
2. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing à deux états (sans compter **accept** et **reject**).
3. Peut-on réaliser les deux simplifications à la fois ?

Exercice 4 : Problème de l'arrêt

Soit un modèle de calcul (un ensemble de machines \mathcal{M}) ayant les propriétés suivantes :

- Les machines opèrent de l'ensemble d'entrées E vers l'ensemble de sorties S .
- On peut encoder les machines : il existe une application *codage* de l'ensemble des machines \mathcal{M} vers l'ensemble d'entrées E (*codage*(M) sera noté $[M]$.)
- Il existe deux machines, *Vrai* et *Faux*, qui pour toute entrée retournent 1 et 0 respectivement.
- Il existe une machine \perp , qui ne s'arrête sur aucune entrée.
- Pour tous $a, b \in E$, $\langle a, b \rangle \in E$. (On suppose notamment qu'il existe une machine D telle que $D(x) = \langle x, x \rangle$.)
- Pour toute machine $Q \in \mathcal{M}$ telle que pour tout $a \in E$, $Q(a) \in E$ et pour toute machine $P \in \mathcal{M}$ la machine $(P \circ Q)$ telle que pour tout $a \in E$:

$$(P \circ Q)(a) = P(Q(a))$$

appartient à \mathcal{M} .

- Soient P, Q, R des machines de \mathcal{M} , $b \in S$, alors la machine N telle que pour tout $a \in E$:

$$N(a) = \begin{cases} Q(a) & \text{si } P(a) = b \\ R(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à \mathcal{M} .

Montrer qu'il n'existe pas de machine H qui, étant donnée une machine X , est telle que :

$$H(\langle [X], a \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ ne s'arrête pas sur } a \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$