

# Chapitre 8

## Intégrale généralisée

Pour le moment, on n'est capable d'intégrer que des fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact  $[a; b]$ . L'objectif de ce chapitre est de généraliser l'intégrale au cas d'un intervalle quelconque  $I$ . Une fois la théorie construite, nous allons établir des versions plus puissantes de tous les théorèmes d'échanges de limites et d'intégrales : en effet, les théorèmes étudiés dans les chapitres précédents nécessitent généralement une hypothèse très forte de convergence uniforme ; nous verrons qu'il est possible de se contenter d'hypothèses moins restrictives.

Dans tout le chapitre,  $I$  est un intervalle contenant au moins deux points. Mis à part cela,  $I$  est quelconque : il peut manquer une ou deux bornes, ou bien l'une ou l'autre des bornes peut être infinie. Les fonctions étudiées seront toujours continues par morceaux sur  $I$ .

### 8.1 Fonctions positives intégrables

Pour commencer, faisons l'observation suivante :

#### Proposition 8.1.1

Soient  $a < b$  deux réels et  $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R}_+)$ . Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante d'intervalles fermés inclus dans  $[a; b]$  telle que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a; b]$ . La suite  $\left( \int_{I_n} f \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f = \int_{[a; b]} f$$

**Preuve :** Si  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_{I_n} f \leq \int_{[a; b]} f$$

parce que  $f$  est à valeurs positives et  $I_n \subset [a; b]$ . La suite  $\left( \int_{I_n} f \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien bornée et l'on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f \leq \int_{[a; b]} f$$

Maintenant, soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[a; b]$ , donc majorée par  $\|f\|_\infty$ . Posons alors

$$\eta = \min\left(\frac{b-a}{3}, \frac{\|f\|_\infty}{2\varepsilon}\right)$$

En particulier,  $2\eta < b - a$  donc  $a < a + \eta < b - \eta < b$

Également,  $\int_{[a; a+\eta]} f \leq \eta \|f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\int_{[b-\eta; b]} f \leq \eta \|f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Par suite,  $\int_{[a+\eta; b-\eta]} f = \int_{[a; b]} f - \int_{[a; a+\eta]} f - \int_{[b-\eta; b]} f \geq -\varepsilon + \int_{[a; b]} f$

Mais on sait que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a; b]$ ; comme  $a + \eta$  et  $b - \eta$  sont dans  $[a; b]$ , on peut trouver  $N_1$  et  $N_2$  entiers tels que  $a + \eta \in I_{N_1}$  et  $b - \eta \in I_{N_2}$ . Posons  $N = \text{Max}(N_1, N_2)$ ; la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante donc  $I_{N_1}$  et  $I_{N_2}$  sont inclus dans  $I_N$  et on a

$$a + \eta \in I_N \quad b - \eta \in I_N \quad \text{donc} \quad [a + \eta; b - \eta] \in I_N$$

Comme  $f$  est à valeurs positives, il vient

$$\int_{I_N} f \geq \int_{[a+\eta; b-\eta]} f \geq -\varepsilon + \int_{[a; b]} f$$

On a prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad -\varepsilon + \int_{[a; b]} f \leq \int_{I_N} f \leq \int_{[a; b]} f$$

d'où

$$\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f = \int_{[a; b]} f \quad \square$$

**Proposition 8.1.2**

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une suite croissante  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles compacts inclus dans  $I$ , dont la réunion est  $I$ , et telle que  $\left(\int_{I_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.
2. Pour toute suite croissante  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles compacts inclus dans  $I$ , dont la réunion est  $I$ , la suite  $\left(\int_{I_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.
3. L'ensemble  $\left\{ \int_J f \mid J \text{ intervalle compact inclus dans } I \right\}$  est majoré.

Si l'une de ces deux propositions est vraie et si  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites croissantes d'intervalles compacts inclus dans  $I$ , dont la réunion est  $I$ , on a

$$\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f = \int_I f$$

**Preuve :** Il est évident que 2  $\implies$  1 et que la troisième proposition implique les deux premières.

On suppose la première assertion vraie : on sait qu'il existe une suite croissante  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles compacts inclus dans  $I$ , dont la réunion est  $I$ , et telle que  $\left(\int_{I_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée. Observons que cette suite est croissante : en effet,  $f$  est positive et  $I_n \subset I_{n+1}$  si  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent,  $\left(\int_{I_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} f = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f$$

On se donne une autre suite croissante  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles compacts inclus dans  $I$ , dont la réunion est  $I$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; comme  $J_n$  est compact, il existe  $c_n < d_n$  tels que  $J_n = [c_n; d_n]$ . Comme  $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$  a pour réunion  $I$ , il existe  $P_1$  et  $P_2$  entiers tels que  $c_n \in I_{P_1}$  et  $d_n \in I_{P_2}$ ; en posant  $P = \text{Max}(P_1, P_2)$ , on voit que  $c_n$  et  $d_n$  sont dans  $I_P$  parce que  $I_{P_1} \subset I_P$  et  $I_{P_2} \subset I_P$ . Comme  $f$  est positive et  $J_n = [c_n; d_n] \subset I_P$ , on a

$$\int_{J_n} f \leq \int_{I_P} f \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{I_k} f$$

Ceci prouve que la suite  $\left(\int_{J_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée donc la propriété 2 est vérifiée. De plus, l'inégalité précédente montre que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{J_n} f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f$$

L'autre inégalité s'obtient de la même manière.

Montrons aussi la troisième assertion. Soit  $J$  un intervalle compact inclus dans  $I$ ; alors  $J = [c; d]$  avec  $c < d$  dans  $I$ . Comme précédemment, on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $J \subset I_N$  d'où par positivité de  $f$ :

$$\int_J f \leq \int_{I_N} f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f$$

et

$$\sup_{J \subset I} \int_J f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f$$

L'autre inégalité est triviale, puisque

$$\left\{ \int_{I_n} f \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \left\{ \int_J f \mid J \text{ intervalle compact inclus dans } I \right\} \quad \square$$

Ce sont ces deux propositions qui nous amènent à poser la définition suivante

**Définition 8.1.3 (Fonction intégrable sur un intervalle quelconque)**

Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{R}_+)$ . On dit que  $f$  est *intégrable sur*  $I$  si, et seulement si, il existe une suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles compacts inclus dans  $I$ , telle que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$ , et la suite  $\left(\int_{I_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée. Dans ce cas, on pose

$$\int_I f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} f = \sup \left\{ \int_J f \mid J \text{ intervalle compact inclus dans } I \right\}$$

La **proposition 1.2** prouve que cette définition est correctement posée : l'intégrale de  $f$  sur  $I$  ne dépend pas du choix de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Et la **proposition 1.1** prouve que toute fonction continue par morceaux sur un intervalle compact  $I$  est intégrable; et les deux définitions de l'intégrale coïncident, ce qui est une bonne chose.

Maintenant, il nous faut étudier cette nouvelle notion d'intégrabilité.

**Proposition 8.1.4 (Propriétés élémentaires)**

1. Soient  $f$  et  $g$  à valeurs positives, continues par morceaux, intégrables sur  $I$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Alors  $\lambda f + g$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

2. Soient  $f$  et  $g$  à valeurs positives, continues par morceaux, telles que

$$\forall x \in I \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Si  $g$  est intégrable sur  $I$ ,  $f$  est intégrable sur  $I$ .

3. Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$  intégrable, telle que  $\int_I f = 0$ . Alors  $f = 0$ .

4. Soient  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$  et  $c \in I$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, elle est intégrable sur  $I_+ = I \cap [c; +\infty[$  et sur  $I_- = I \cap ]-\infty; c]$ . Dans ce cas,

$$\int_I f = \int_{I_+} f + \int_{I_-} f$$

**Preuve :** Les deux premières propositions sont des conséquences triviales de la **définition 1.3** et de la **proposition 1.2**.

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$ , intégrable sur  $I$ , d'intégrale nulle. Alors pour tout intervalle compact  $J \subset I$ ,

$$0 \leq \int_J f \leq \int_I f = 0$$

Comme  $f$  est continue positive sur  $J$ , on sait que  $f$  est nulle sur  $J$ . Mais tout élément de  $I$  peut être placé dans un intervalle compact inclus dans  $I$ , donc  $f$  est nulle partout sur  $I$ .

Enfin, soient  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$  et  $c \in I$ . Si  $c$  est une des bornes de  $I$ , il n'y a rien à prouver. Donc on suppose  $c$  intérieur à  $I$ . On pose

$$I_+ = I \cap [c; +\infty[ \quad I_- = I \cap ]-\infty; c]$$

Supposons  $f$  intégrable sur  $I$ . Soient  $J_+ \subset I_+$  et  $J_- \subset I_-$  deux intervalles compacts ; posons

$$J_+ = [x; y] \quad J_- = [z; t] \quad \text{avec} \quad z < t \leq c \leq x < y$$

On a 
$$\int_{J_+} f + \int_{J_-} f = \int_{[z; y]} f - \int_{[t; x]} f \leq \int_{[z; y]} f$$

en utilisant la relation de Chasles et le fait que  $t \leq x$  et  $f$  est positive sur  $[t; x]$ . Comme  $f$  est intégrable sur  $I$  et  $[z; y] \subset I$ , il vient

$$\int_{J_+} f + \int_{J_-} f \leq \int_I f$$

Les intervalles compacts  $J_+$  et  $J_-$  étant quelconques inclus dans  $I_+$  et  $I_-$  respectivement,  $f$  est intégrable sur  $I_+$  et sur  $I_-$ , et en passant au Sup, on a

$$\int_{I_+} f + \int_{I_-} f \leq \int_I f$$

Réciproquement, supposons  $f$  intégrable sur  $I_+$  et sur  $I_-$ . On prend  $J \subset I$  un intervalle compact inclus. Alors  $J \cap ]-\infty; c]$  et  $J \cap [c; +\infty[$  sont des intervalles compacts inclus dans  $I_-$  et  $I_+$  respectivement. D'après Chasles,

$$\int_J f = \int_{J \cap ]-\infty; c]} f + \int_{J \cap [c; +\infty[} f \leq \int_{I_-} f + \int_{I_+} f$$

Comme  $J$  est quelconque, on voit que  $f$  est intégrable sur  $I$  et en passant au Sup sur  $J$ , on a

$$\int_I f \leq \int_{I_-} f + \int_{I_+} f \quad \square$$

**Corollaire 8.1.5**

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ . On pose  $a = \text{Inf}I$  et  $b = \text{Sup}I$  et on prend  $c \in I$ . Alors  $f$  est intégrable si, et seulement si, les deux limites suivantes sont finies :

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t) dt \quad \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t) dt$$

De plus, dans ce cas,  $\int_I f$  est la somme de ces deux limites.

**Preuve :** C'est une simple reformulation de la proposition précédente, en tenant compte du fait que pour une fonction croissante sur un intervalle, le sup en un point est égal à la limite.  $\square$

**Exemple 8.1.6**

Donnons maintenant quelques exemples classiques de fonctions intégrables. Ces exemples seront nos intégrales de référence pour l'étude d'intégrabilités plus compliquées.

- **Intégrales de Riemann :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(t) = t^{-\alpha}$$

Alors  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ , à valeurs positives. On a

$$\forall x > 0 \quad \int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Si  $\alpha < 1$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^x f(t) dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Donc  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$ , pas intégrable sur  $[1; +\infty[$ . De plus,

$$\int_{]0; 1]} f = \frac{1}{1-\alpha}$$

Si  $\alpha > 1$ , un calcul de limite similaire montre que  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  et n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$ . De plus,

$$\int_{[1; +\infty[} f = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Enfin, si  $\alpha = 1$ ,  $f$  n'est intégrable ni sur  $]0; 1]$ , ni sur  $[1; +\infty[$ .

En conclusion :  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  si, et seulement si,  $\alpha < 1$ ;  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

- **Intégrale logarithmique :** Posons

$$\forall t > 0 \quad f(t) = |\ln t|$$

$f$  est continue par morceaux positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,

$$\forall x \in ]0; 1] \quad \int_x^1 f(t) dt = [t - t \ln t]_x^1 = 1 - x + x \ln x$$

d'où 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 f(t) dt = 1$$

Ceci prouve que  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  et

$$\int_{]0;1]} f = 1$$

De même,  $\forall x \in [1; +\infty[$   $\int_1^x f(t) dt = x \ln x - x - 1 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x \ln x$

Donc  $f$  n'est pas intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

- **Intégrales exponentielles** : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; posons

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \exp(\alpha t)$$

$f$  est continue par morceaux, positive sur  $\mathbb{R}$ . On prend  $c \in \mathbb{R}$ . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_c^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{\exp(\alpha x) - \exp(\alpha c)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x - c & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Un simple calcul de limite montre que :  $f$  est intégrable sur  $[c; +\infty[$  si, et seulement si,  $\alpha < 0$ ;  $f$  est intégrable sur  $] -\infty; c]$  si, et seulement si,  $\alpha > 0$ .

- Si  $\alpha > 1$ , on a

$$\forall x \geq 1 \quad \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

D'après la **proposition 1.4**,  $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  et

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

## 8.2 Théorèmes de comparaisons

D'après la **proposition 1.4**, pour savoir étudier l'intégrabilité d'une fonction positive sur un intervalle quelconque, il suffit de savoir l'étudier sur les intervalles de la forme  $[a; b[$  ( $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ) ou  $]a; b]$  (avec  $a \in \overline{\mathbb{R}}_-$ ). On formule ici des théorèmes de comparaison pour les intervalles du premier type, le second type se traitant de manière identique.

Ainsi, dans toute la suite,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , avec  $a < b$ .

### Théorème 8.2.1

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux, positives, sur  $[a; b]$ .

- On suppose que  $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{=} O(g(t))$ . Si  $g$  est intégrable sur  $[a; b]$ , alors  $f$  est aussi intégrable sur  $[a; b]$ . De plus,

$$\int_a^b f(t) dt \underset{t \rightarrow b^-}{=} O\left(\int_a^b g(t) dt\right)$$

Si  $f$  n'est pas intégrable, alors  $g$  n'est pas intégrable. De plus,

$$\int_a^x f(t) dt \underset{t \rightarrow b^-}{=} O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

- Même chose avec des « petit o. »
- Même chose avec des équivalents.

**Preuve :**

- Supposons que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $b$ . Il existe  $c \in [a; b[$  et  $M > 0$  tels que

$$\forall x \in [c; b[ \quad 0 \leq f(x) \leq M g(x)$$

Si  $g$  est intégrable sur  $[a; b[$ , la **proposition 1.4** assure que  $g$  est aussi intégrable sur  $[c; b[$  et que  $f$  aussi. Comme  $f$  est aussi intégrable sur  $[a; c]$  (intervalle compact), elle est finalement intégrable sur  $[a; b[$ . En outre, toujours à l'aide de la **proposition 1.4**,

$$\forall x \in [c; b[ \quad 0 \leq \int_x^b f(t) dt \leq M \int_x^b g(t) dt$$

Ainsi, 
$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

On suppose maintenant que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a; b[$ . D'après ce qui précède,  $g$  ne peut pas être intégrable sur  $[a; b[$ . Aussi, par définition de l'intégrabilité, on a

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x g(t) dt = +\infty$$

Ensuite, si  $x \in [c; b[$ , on sait que

$$\int_c^x f(t) dt \leq M \int_c^x g(t) dt$$

donc 
$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^c f(t) dt + M \int_c^x g(t) dt = \int_a^c (f(t) - M g(t)) dt + M \int_a^x g(t) dt$$

Comme 
$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x g(t) dt = +\infty$$

on sait qu'il existe  $d \in [a; b[$  tel que

$$\forall x > d \quad \left| \int_a^c (f(t) - M g(t)) dt \right| \leq \int_a^x g(t) dt$$

Par conséquent,  $\forall x \in [a; b[ \quad x > \text{Max}(c, d) \implies 0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq (M+1) \int_a^x g(t) dt$

Conclusion : 
$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

- Supposons que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $b$ . Soit  $\varepsilon > 0$  : il existe  $c \in [a; b[$  tel que

$$\forall x \in [c; b[ \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$$

Si  $g$  est intégrable sur  $[a; b[$ , alors  $f$  aussi ; donc elles sont toutes deux intégrables sur  $[c; b[$  et on peut intégrer l'inégalité :

$$\forall x \in [c; b[ \quad 0 \leq \int_x^b f(t) dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt$$

Ainsi, 
$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

Maintenant, si  $f$  n'est pas intégrable, on sait que  $g$  n'est pas intégrable donc

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x g(t) dt = +\infty$$

Si  $x \in [c; b[$ , on sait que (même calcul que dans la preuve précédente)

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^c \left( f(t) - \frac{\varepsilon}{2} g(t) \right) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t) dt$$

Or, 
$$\int_a^c \left( f(t) - \frac{\varepsilon}{2} g(t) \right) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o \left( \int_a^x g(t) dt \right)$$

donc il existe  $d \in [a; b[$  tel que

$$\forall x > d \quad \left| \int_a^c \left( f(t) - \frac{\varepsilon}{2} g(t) \right) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t) dt$$

Au final, 
$$\forall x \in [a; b[ \quad x > \text{Max}(c, d) \implies 0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \varepsilon \int_a^x g(t) dt$$

Conclusion : 
$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o \left( \int_a^x g(t) dt \right)$$

- Supposons que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $b$ . En particulier,  $f(x) \underset{x \rightarrow b^-}{=} O(g(x))$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow b^-}{=} O(f(x))$  donc  $f$  est intégrable sur  $[a; b[$  si, et seulement si,  $g$  l'est.

Ensuite, on sait que  $|f(x) - g(x)| \underset{x \rightarrow b^-}{=} o(g(x))$ . Donc si  $f$  et  $g$  sont intégrables, ce qui précède assure que

$$\int_x^b |f(t) - g(t)| dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o \left( \int_x^b g(t) dt \right)$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\forall x \in [a; b[ \quad \left| \int_x^b (f(t) - g(t)) dt \right| \leq \int_x^b |f(t) - g(t)| dt$$

d'où 
$$\int_x^b f(t) dt - \int_x^b g(t) dt = \int_x^b (f(t) - g(t)) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o \left( \int_x^b g(t) dt \right)$$

et finalement, 
$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_x^b g(t) dt$$

Dans le cas où  $f$  et  $g$  ne sont pas intégrables sur  $[a; b[$ , c'est exactement le même principe et l'on obtient

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g(t) dt \quad \square$$

**Exemple 8.2.2**

Ces théorèmes permettent d'étudier rapidement des questions d'intégrabilité, ou de calculer des équivalents d'intégrales.

- Posons 
$$\forall x > 0 \quad f(x) = \exp(-\ln^2 x)$$

$f$  est continue par morceaux, positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 ; si l'on note encore  $f$  la fonction prolongée, elle est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Le seul problème d'intégrabilité se situe donc au voisinage de  $+\infty$ .



Si l'on fixe  $\alpha > 1$ , on a

$$\forall x > 0 \quad x^\alpha f(x) = \exp(\alpha \ln x - \ln^2 x) = \exp(\ln x (\alpha - \ln x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

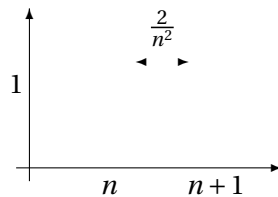
Ainsi,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-\alpha})$  donc  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (ou sur  $\mathbb{R}_+$ , puisqu'on a prolongé  $f$  par continuité). On peut même dire, au cas où cela nous intéresse, que

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}\right) = o(x^{1-\alpha})$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $\forall t > 0 \quad f(t) = t^{x-1} \exp(-t)$

$f$  est continue positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a  $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$  donc  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  si, et seulement si,  $x - 1 > -1$ , c'est-à-dire  $x > 0$ . Et  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , en utilisant les théorèmes de croissances comparées. Ainsi,  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si, et seulement si,  $x > 0$ .

On fera très attention à l'erreur classique, qui consiste à croire qu'une fonction positive intégrable sur  $[a; +\infty[$  doit avoir une limite nulle en  $+\infty$ . Cette assertion est vraie si l'on ajoute l'hypothèse que la fonction a une limite en  $+\infty$ . Par exemple, considérer la fonction  $f$  définie sur chaque intervalle  $[n; n+1[$  par :



Cette fonction est intégrable sur  $[1; +\infty[$  mais elle n'a pas de limite en  $+\infty$ .

### 8.3 Intégrale des fonctions à valeurs scalaires

#### Définition 8.3.1 (Fonctions intégrables)

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ . On dit qu'elle est intégrable sur  $I$  si, et seulement si,  $|f|$  est intégrable. On note

- $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur  $I$ .
- $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues intégrables sur  $I$ .

#### Proposition 8.3.2

$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ .

**Preuve :** Soient  $f$  et  $g$  continues par morceaux sur  $I$ , intégrables ; soient  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$ . On a

$$\forall x \in I \quad |\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda| |f(x)| + |\mu| |g(x)|$$

Or,  $|f|$  et  $|g|$  sont intégrables donc  $|\lambda f + \mu g|$  est intégrable (**proposition 1.4**). □

#### Proposition 8.3.3

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ .

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si,  $f_+$  et  $f_-$  sont intégrables sur  $I$ .
- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si,  $Re f$  et  $Im f$  sont intégrables sur  $I$ .

**Preuve :** Supposons  $f$  à valeurs réelles. On rappelle que  $f = f_+ - f_-$  et  $|f| = f_+ + f_-$  et que  $f_+$  et  $f_-$  sont continues par morceaux, positives sur  $I$ . D'après la **proposition 1.4**, si  $f_+$  et  $f_-$  sont intégrables sur  $I$ , alors  $|f| = f_+ + f_-$  est aussi intégrable sur  $I$  donc  $f$  est intégrable. Réciproquement, si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors  $|f|$  l'est ; or  $f_+ \leq |f|$  et  $f_- \leq |f|$  donc  $f_+$  et  $f_-$  sont intégrables sur  $I$ .

Pour les fonctions à valeurs complexes, c'est exactement pareil, en utilisant les inégalités

$$|\operatorname{Re} f| \leq |f| \quad |\operatorname{Im} f| \leq |f| \quad |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \quad \square$$

**Définition 8.3.4 (Intégrale généralisée)**

Si  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ , on pose

$$\int_I f = \int_I (\operatorname{Re} f)_+ - \int_I (\operatorname{Re} f)_- + i \left( \int_I (\operatorname{Im} f)_+ - \int_I (\operatorname{Im} f)_- \right)$$

**Proposition 8.3.5 (Linéarité)**

L'intégrale est une forme linéaire sur  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ .

**Preuve :** Vérification immédiate à partir de la définition et à l'aide de la **proposition 1.4** pour les fonctions à valeurs positives. □

**Proposition 8.3.6 (Relation de Chasles)**

Soient  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$  et  $c \in I$ .  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, elle est intégrable sur les intervalles  $I_- = I \cap ]-\infty; c]$  et sur  $I_+ = I \cap [c; +\infty[$ . Dans ce cas,

$$\int_I f = \int_{I_+} f + \int_{I_-} f$$

**Preuve :** Trivial. □

Comme précédemment, on prend  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$  tels que  $a < b$  et on énonce uniquement des critères d'intégrabilité sur l'intervalle  $[a; b[$ . Il est possible d'obtenir des critères similaires pour les intervalles du type  $]c; d]$  avec  $c \in \overline{\mathbb{R}}_-$  et  $d \in \mathbb{R}$ .

Ces théorèmes ne nécessitent presque aucune preuve : ils sont immédiats à vérifier, grâce au travail fait sur les fonctions à valeurs positives.

**Théorème 8.3.7**

Soit  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ . Alors

$$\int_{]a; b[} f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

Il faut bien faire attention au fait qu'il n'y a pas de réciproque à ce théorème : si la limite existe, ceci ne signifie par que  $f$  est intégrable ; cela signifie uniquement que la limite existe. L'existence de la limite ci-dessus est strictement moins forte que l'intégrabilité.

Par exemple, il est assez simple (voir exercices) de prouver que  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  ; cependant, la limite suivante existe :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

**Corollaire 8.3.8**

Soit  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  ; soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs dans  $I$ , telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{Inf} I \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{Sup} I$$

Alors la suite  $\left( \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_I f$ .

**Théorème 8.3.9**

Soient  $f$  et  $g$  continues par morceaux sur  $I$ , avec  $g$  à valeurs réelles positives.

- On suppose que  $f(x) = O(g(x))$   $_{x \rightarrow b^-}$ . Si  $g$  est intégrable sur  $[a; b[$  alors  $f$  est intégrable sur  $[a; b[$  et

$$\int_x^b f(t) dt = O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

Si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a; b[$ , alors  $g$  n'est pas intégrable sur  $[a; b[$  et

$$\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right) \quad _{x \rightarrow b^-}$$

- Même chose avec des « petit o. »

**Théorème 8.3.10 (Théorème de changement de variable généralisé)**

Soit  $I$  un intervalle quelconque contenant au moins deux points ; on note  $a = \text{Inf} I$  et  $b = \text{Sup} I$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ , strictement monotone ; on note

$$\varphi(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) \quad \varphi(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$$

Si  $f \in \mathcal{L}^1(\varphi(I), \mathbb{K})$ , alors  $(f \circ \varphi) \varphi'$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi) \varphi'$$

**Preuve :** La preuve se fait en plusieurs étapes.

- Commençons par supposer  $f$  à valeurs positives et  $\varphi$  strictement croissante. Comme  $\varphi$  est continue, on sait que  $\varphi(I)$  est un intervalle ; et comme  $\varphi$  est croissante strictement, on a

$$\text{Inf} \varphi(I) = \varphi(a^+) \quad \text{Sup} \varphi(I) = \varphi(b^-)$$

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante, avec  $a_n < b_n$  pour tout  $n$ . Autrement dit, les  $([a_n; b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  sont une suite croissante d'intervalles compacts dont la réunion est  $I$ . Par suite,  $([\varphi(a_n); \varphi(b_n)])_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'intervalles compacts dont la réunion est  $\varphi(I)$ . Le théorème de changement de variable pour les intégrales sur des intervalles compacts assure que

$$\int_{a_n}^{b_n} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} f(t) dt$$

Comme  $f$  est intégrable sur  $\varphi(I)$ , on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} f dt = \int_{\varphi(I)} f = \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(t) dt$$

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$  existe et vaut  $\int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(t) dt$ . Mais la fonction  $(f \circ \varphi) \varphi'$  est positive ; l'existence de cette limite assure que cette fonction est intégrable sur I et que

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(t) dt$$

- Maintenant, si  $f$  est à valeurs réelles et  $\varphi$  est strictement croissante. Alors  $\varphi'$  est strictement positive donc

$$((f \circ \varphi) \varphi')_+ = (f_+ \circ \varphi) \varphi' \quad ((f \circ \varphi) \varphi')_- = (f_- \circ \varphi) \varphi'$$

Supposons  $f$  intégrable sur  $\varphi(I)$ . Alors  $f_+$  et  $f_-$  sont positives, intégrables sur  $\varphi(I)$  ; d'après ce qu'on vient de faire,  $(f_+ \circ \varphi) \varphi'$  et  $(f_- \circ \varphi) \varphi'$  sont intégrables sur I et

$$\int_a^b f_+(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f_+(t) dt \quad \int_a^b f_-(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f_-(t) dt$$

D'après la **proposition 3.3**,  $(f \circ \varphi) \varphi'$  est intégrable sur I et par définition de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_a^b f_+(\varphi(t)) \varphi'(t) dt - \int_a^b f_-(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f_+(t) dt - \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f_-(t) dt \\ \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(t) dt \end{aligned}$$

- Si  $f$  est à valeurs réelles et  $\varphi$  strictement décroissante, il suffit d'appliquer ce qui précède avec  $-\varphi$ .
- Si  $f$  est à valeurs imaginaires et  $\varphi$  strictement monotone, on sépare parties réelle et imaginaire, puis on applique les résultats précédents. Un des points importants est que  $\varphi'$  est à valeurs réelles, donc

$$\operatorname{Re}((f \circ \varphi) \varphi') = ((\operatorname{Re} f) \circ \varphi) \varphi' \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}((f \circ \varphi) \varphi') = ((\operatorname{Im} f) \circ \varphi) \varphi' \quad \square$$

**Définition 8.3.11 (Norme de convergence en moyenne)**

On appelle *norme de convergence en moyenne* l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \|f\|_1 = \int_I |f| \end{aligned}$$

La proposition suivante est immédiate :

**Proposition 8.3.12**

L'application  $\|\cdot\|_1$  est une semi-norme sur  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ , c'est-à-dire qu'on a toutes les propriétés d'une norme, sauf la propriété de séparation :

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$$

et  $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

En revanche, c'est une norme sur  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$ .

En effet, sur  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ , on a le problème des points de discontinuité qui empêche d'avoir la propriété de séparation. Plus précisément, si  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  et  $\|f\|_1 = 0$ , alors pour tout intervalle compact  $J \subset I$ ,  $f$  est nulle sur  $J$  sauf en un nombre fini de points.

En effet, comme  $|f|$  est continue par morceaux sur  $J$ , on peut trouver une subdivision  $J = \{c_0 < \dots < c_n\}$  adaptée à  $|f|$ ; on a

$$\int_J |f| = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[c_k; c_{k+1}]} f$$

Mais comme  $|f|$  est positive on a

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \int_{[c_k; c_{k+1}]} f = 0$$

Ensuite,  $|f|$  est continue sur  $]c_k; c_{k+1}[$ , prolongeable par continuité à  $[c_k; c_{k+1}]$ , positive, donc nulle sur  $]c_k; c_{k+1}[$ .

Pendant, on ne peut rien dire de particulier sur  $f$  aux points de discontinuités  $(c_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

**Définition 8.3.13 (Espaces  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{L}_c^2$ )**

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ . On dit qu'elle est de carré intégrable si, et seulement si,  $|f|^2$  est intégrable. On note

$$\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K}) \mid f \text{ de carré intégrable}\}$$

et

$$\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \mid f \text{ de carré intégrable}\}$$

On appelle *norme de convergence en moyenne quadratique* l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \left( \int_I |f|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

**Proposition 8.3.14**

$\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ . De plus,

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \quad fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$$

L'application

$$\begin{aligned} \langle | \rangle : (\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}))^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\longmapsto \int_I fg \end{aligned}$$

est bilinéaire, symétrique, positive. C'est un produit scalaire sur  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$ .

**Preuve :** Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$  et si  $J \subset I$  est un intervalle compact, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_J |fg| \leq \left( \int_J |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int_J |g|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

En prenant le Sup sur les intervalles compacts  $J \subset I$ , on voit que  $fg$  est intégrable sur  $I$  et  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ . Du coup,  $(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$  est intégrable, ce qui prouve que  $f + g$  est de carré intégrable. Une fois ceci obtenu, tout le reste est évident.  $\square$

**Proposition 8.3.15**

Si  $I$  est borné, alors  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  et

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C}) \quad \|f\|_1 \leq \sqrt{|I|} \|f\|_2$$

En particulier,  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  et la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en moyenne.

**Preuve :** Si  $I$  est borné, la fonction constante 1 est de carré intégrable. Donc si  $f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ ,  $f = f \times 1$  est dans  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ . L'inégalité de Cauchy-Scwarz fournit

$$\int_I |f| \leq \left( \int_I 1 \right)^{1/2} \left( \int_I |f|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|I|} \|f\|_2 \quad \square$$

En revanche, il est important de préciser qu'il n'y a aucun rapport entre les deux espaces lorsque  $I$  n'est pas borné. Par exemple, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $\mathcal{L}^2$  sur  $[1; +\infty[$ , mais n'est pas  $\mathcal{L}^1$ . Ou bien considérer la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \left[ n; n + \frac{1}{n^3} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f$  est continue par morceaux sur  $[1; +\infty[$ , intégrable, mais son carré n'est pas intégrable.

## 8.4 Théorèmes d'interversions de limites

La construction étant faite, il est maintenant temps de se donner des outils d'études d'intégrales généralisées. On sera souvent confronté à des problèmes d'interversions de limites et d'intégrales ; on a déjà obtenu des théorèmes faibles dans le cas où l'intervalle d'intégration est compact. Mais les preuves échouent dans le cadre de notre nouvelle théorie.

Les théorèmes qui suivent sont difficiles et très profonds ; les preuves sont données à titre indicatif, mais n'ont pas à être connues.

### 8.4.1 Le théorème de convergence monotone

**Théorème 8.4.1 (Théorème de convergence monotone)**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux sur  $I$ , intégrables, convergeant simplement en croissant vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .

$f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, la suite  $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite finie. Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Pour prouver ce théorème, on commence par un lemme :

**Lemme 8.4.2**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux sur  $[a; b]$ , convergent simplement et en décroissant vers la fonction nulle. Alors la suite  $\left(\int_{[a; b]} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**Preuve :** Posons

$$\Delta = \{(x, y) \in [a; b]^2 \mid x < y\}$$

et 
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x, y) \in \Delta \quad F_n(x, y) = \int_{[x; y]} f_n \quad \mu_n(x, y) = \frac{F_n(x, y)}{y - x}$$

On aura besoin de quelques observations simples :

- Commençons par montrer que les suites  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement. Fixons  $x < y$  dans  $[a; b]$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a; b] \quad 0 \leq f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq F_{n+1}(x, y) \leq F_n(x, y)$$

La suite  $(F_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, minorée par 0, donc convergente. Sa limite est notée  $F(x, y)$ . Il s'ensuit que  $(\mu_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi en décroissant vers  $\frac{F(x, y)}{y - x}$ , qu'on note  $\mu(x, y)$ .

- On montre ensuite que  $F$  est continue. Fixons  $x < y$  et  $x' < y'$  dans  $[a; b]$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} F_n(x, y) - F_n(x', y') &= \int_x^y f_n(t) dt - \int_{x'}^{y'} f_n(t) dt \\ &= \int_x^{x'} f_n(t) dt + \int_{x'}^y f_n(t) dt - \int_{x'}^y f_n(t) dt - \int_y^{y'} f_n(t) dt \\ F_n(x, y) - F_n(x', y') &= \int_x^{x'} f_n(t) dt - \int_y^{y'} f_n(t) dt \end{aligned}$$

Par suite, 
$$|F_n(x, y) - F_n(x', y')| \leq \left| \int_x^{x'} f_n(t) dt \right| + \left| \int_y^{y'} f_n(t) dt \right|$$

Mais  $f_n \leq f_0$  et  $f_0$  est bornée parce que  $[a; b]$  est compact. Donc

$$|F_n(x, y) - F_n(x', y')| \leq \|f_0\|_\infty (|x - x'| + |y - y'|)$$

Comme  $n$  était quelconque, en passant à la limite il vient

$$|F(x, y) - F(x', y')| \leq \|f_0\| (|x - x'| + |y - y'|)$$

Ces inégalités montrent que les  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $F$  sont continues sur  $\Delta$ . Il s'ensuit que les  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mu$  sont continues sur  $\Delta$ , puisque  $(x, y) \mapsto y - x$  est continue et ne s'annule pas sur  $\Delta$ .

- Soient  $x_0 < \dots < x_p$  dans  $[a; b]$ . La relation de Chasles nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{p-1} F_n(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{[x_k; x_{k+1}]} f_n = \int_{x_0}^{x_p} f_n = F_n(x_0, x_p)$$

En passant à la limite,

$$\sum_{k=0}^{p-1} F(x_k, x_{k+1}) = F(x_0, x_p)$$

ou encore 
$$\sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) \mu(x_k, x_{k+1}) = (x_p - x_0) \mu(x_0, x_p)$$

Observons que  $F(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} f_n = (b - a) \mu(a, b)$ . Notre but est de montrer que cette limite est nulle ; on sait déjà que  $\mu(a, b) \geq 0$  puisque les  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont à valeurs positives. On suppose que  $\mu(a, b) > 0$ , et on se donne  $\varepsilon \in ]0; \mu(a, b)[$ .

La fonction  $f_0$  est continue par morceaux sur  $[a; b]$  ; on prend une subdivision adaptée  $x_0 = a < \dots < x_p = b$  et l'on a, par décroissance de la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_0(x_k, x_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{p-1} F_0(x_k, x_{k+1}) \geq \sum_{k=0}^{p-1} F(x_k, x_{k+1}) = F(x_0, x_p) = F(a, b) = (b - a) \mu(a, b) \\ &> \varepsilon (b - a) \end{aligned}$$

Mais on a aussi 
$$b - a = x_p - x_0 = \sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k)$$

d'où 
$$\sum_{k=0}^{p-1} (x_{k+1} - x_k) (\mu_0(x_k, x_{k+1}) - \varepsilon) > 0$$

Par suite, il existe  $k \in \llbracket 0; p - 1 \rrbracket$  tel que  $(x_{k+1} - x_k) (\mu_0(x_k, x_{k+1}) - \varepsilon) > 0$ . Comme  $x_{k+1} - x_k > 0$ , c'est que  $\mu_0(x_k, x_{k+1}) > \varepsilon$ . Or,  $\mu_0$  est continue donc  $\{(x, y) \in \Delta \mid \mu_0(x, y) > \varepsilon\}$  est un ouvert, qui contient  $(x_k, x_{k+1})$ . Il contient également une boule ouverte centrée en  $(x_k, x_{k+1})$  et on en déduit qu'il existe  $a_0 < b_0$  dans  $]x_k; x_{k+1}[$ , tels que  $\mu_0(a_0, b_0) > \varepsilon$ . Ceci peut être récrit en

$$\frac{1}{b_0 - a_0} \int_{[a_0; b_0]} (f_0 - \varepsilon) > 0$$

Comme  $x_k < a_0 < b_0 < x_{k+1}$  et  $f_0 - \varepsilon$  est continue sur  $]x_k; x_{k+1}[$ , il vient que

$$\forall x \in [a_0; b_0] \quad f_0(x) > \varepsilon$$

En recommençant le même raisonnement avec  $f_1$  qui est continue par morceaux sur  $[a_0; b_0]$ , on peut trouver  $a_1 < b_1$  dans  $[a_0; b_0]$ , tels que  $f_1 > \varepsilon$  sur  $[a_1; b_1]$ .

Et par récurrence, on prouve qu'il existe une suite  $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\Delta$ , telle que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a_n; b_n] \quad f_n(t) > \varepsilon$$

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  doit converger, parce qu'elle est croissante majorée par  $b$ . On note  $\ell$  sa limite. Si  $n \in \mathbb{N}$ , on a par construction  $\ell \in [a_n; b_n]$ . Donc  $f_n(\ell) > \varepsilon$ . Mais  $(f_n(\ell))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, d'où une contradiction. Ceci prouve que  $\mu(a, b) = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Preuve du théorème de convergence monotone :** On prouve le théorème dans le cas où  $I = [a; b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ . Le résultat général se généralise facilement.



On se donne une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues par morceaux sur  $[a; b[$ , croissante, convergeant simplement vers  $f$  continue par morceaux sur  $[a; b[$ .

- Supposons que  $f$  est intégrable sur  $[a; b[$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f - f_n$  est alors intégrable sur  $[a; b[$ . En utilisant le fait que  $f_0 \leq f_n$ , il vient

$$\forall c \in ]a; b[ \quad 0 \leq \int_{[a; b[} (f - f_n) = \int_{[a; c]} (f - f_n) + \int_{[c; b[} (f - f_n) \leq \int_{[a; c]} (f - f_n) + \int_{[c; b[} (f - f_0)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(f - f_0)$  est intégrable sur  $[a; b[$ , il existe  $c \in ]a; b[$  tel que

$$0 \leq \int_c^b (f - f_0) \leq \varepsilon$$

D'après le **lemme 4.2**, la suite  $\left(\int_{[a; c]} (f - f_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N \quad \int_{[a; c]} (f - f_n) \leq \varepsilon$$

Il s'ensuit  $\forall n \geq N \quad 0 \leq \int_{[a; b[} (f - f_n) \leq 2\varepsilon$

et  $\forall n \geq N \quad 0 \leq \int_{[a; b[} f - \int_{[a; b[} f_n \leq 2\varepsilon$

Ceci prouve en même temps que  $\left(\int_{[a; b[} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est  $\int_{[a; b[} f$ .

- Réciproquement, supposons que cette suite converge vers une limite finie. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c \in [a; b[ \quad I_n(c) = \int_{[a; c]} f_n$$

et  $\forall c \in [a; b[ \quad I(c) = \int_{[a; c]} f$

Si  $c \in [a; b[$  est fixé, le **lemme 4.2** montre que  $\left(\int_{[a; c]} (f - f_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Ceci équivaut à dire que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[a; b[$  vers la fonction  $I$ . Mais en fait, cette convergence est uniforme : en effet, en utilisant la croissance de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\begin{aligned} \forall n, p \in \mathbb{N} \quad \forall c \in [a; b[ \quad |I_{n+p}(c) - I_n(c)| &= \int_{[a; c]} \underbrace{(f_n - f_{n+p})}_{\geq 0} \leq \int_{[a; b[} (f_n - f_{n+p}) \\ &\leq \int_{[a; b[} f_n - \int_{[a; b[} f_{n+p} \end{aligned}$$

Comme on a supposé que  $\left(\int_{[a; b[} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, on obtient bien que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait au critère de Cauchy uniforme sur  $[a; b[$ , donc converge uniformément vers  $I$ . Enfin, comme les  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont intégrables sur  $[a; b[$ , on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{c \rightarrow b^-} I_n(c) = \int_{[a; b[} f_n$$

D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction  $I$  a une limite en  $b$  et l'on a

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a; c]} f = \lim_{c \rightarrow b^-} I(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b[} f_n$$

Mais ceci ne prouve toujours pas que  $f$  est intégrable sur  $[a; b[$ ; en revanche, on sait maintenant que  $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a; c]} (f - f_0)$ . Comme  $f - f_0$  est positive, elle est intégrable; donc  $f$  est intégrable sur  $[a; b[$ . □

Le corollaire suivant est évident :

**Corollaire 8.4.3**

Soit  $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une série de fonctions continues par morceaux sur  $I$ , positives, convergeant simplement vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, la série  $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Et dans ce cas,

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$$

**8.4.2 Le théorème de convergence en moyenne**

Il s'agit d'un corollaire du théorème de convergence monotone, utilisé pour intervertir une somme et une intégrale.

**Théorème 8.4.4 (Théorème de convergence en moyenne)**

Soit  $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une série de fonctions continues par morceaux sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , convergeant simplement vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . On suppose que la série  $((\|f_n\|_1))_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Alors  $f$  est intégrable, la série  $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et l'on a

$$\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$$

De plus, 
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_1$$

**Preuve :** On définit une nouvelle suite de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad g_n(x) = \text{Min} \left( |f(x)|, \sum_{k=0}^n |f_k(x)| \right)$$

Si  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  est continue par morceaux sur  $I$  puisque

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \text{Min}(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

Ensuite, si  $x \in [a; b[$ , la suite  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. En effet, soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Si  $g_n(x) = |f(x)|$ , cela signifie que

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n+1} |f_k(x)|$$

donc

$$g_{n+1}(x) = |f(x)| = g_n(x)$$

- Si  $g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_k(x)|$ , on a

$$g_n(x) \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad g_n(x) \leq \sum_{k=0}^{n+1} |f_k(x)|$$

donc 
$$g_n(x) \leq \text{Min} \left( |f(x)|, \sum_{k=0}^n |f_k(x)| \right) = g_{n+1}(x)$$

Également, la suite  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|f(x)|$ . En effet, donnons-nous  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq N \quad |f(x)| \leq \varepsilon + \sum_{k=0}^n |f_k(x)|$$

Soit  $n \geq N$ .

- Si  $g_n(x) = |f(x)|$ , c'est très bien puisque  $|g_n(x) - |f(x)|| = 0 \leq \varepsilon$ .
- Si  $g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_k(x)|$ , on a

$$g_n(x) \leq |f(x)| \leq \varepsilon + g_n(x)$$

d'où 
$$||f(x)| - g_n(x)| \leq \varepsilon$$

Au final, 
$$\forall n \geq N \quad ||f(x)| - g_n(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve notre assertion.

Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence monotone, il reste à remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(x) \leq \sum_{k=0}^n |f_k(x)|$$

donc 
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I g_n \leq \sum_{k=0}^n \int_I |f_k| = \sum_{k=0}^n \|f_k\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 \quad (\star)$$

La suite  $\left( \int_I g_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, majorée, donc convergente. Par convergence monotone, on en déduit que  $|f|$  est intégrable, donc que  $f$  est intégrable et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \int_I |f|$$

En passant à la limite dans  $(\star)$ , il vient

$$\int_I |f| = \int_I \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Maintenant qu'on sait que  $f$  est intégrable, on peut considérer :

$$\left| \int_I f - \sum_{k=0}^n f_k \right| = \left| \int_I \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_I f_k \right) \right| \leq \int_I \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right|$$

On applique les résultats précédents à la série de fonctions  $((f_k))_{k \geq n+1}$  :

$$\left| \int_I f - \sum_{k=0}^n \int_I f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_1$$

Le reste d'une série convergente tend vers 0 donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_I f_k$  existe et vaut  $\int_I f$ . □

**Corollaire 8.4.5**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues par morceaux sur  $I$ , convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . On suppose aussi que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy pour  $\|\cdot\|_1$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

**Preuve :** On sait que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \|f_{n+p} - f_n\|_1 \leq \varepsilon$$

En particulier, il existe  $\varphi(0) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n, p \geq \varphi(0) \quad \|f_n - f_p\|_1 \leq 1$$

Ensuite, il existe  $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ , tel que  $\varphi(1) > \varphi(0)$  et

$$\forall n, p \geq \varphi(1) \quad \|f_n - f_p\|_1 \leq \frac{1}{2}$$

En particulier,

$$\|f_{\varphi(0)} - f_{\varphi(1)}\|_1 \leq 1$$

Par récurrence, on construit une suite  $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante d'entiers, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$$

Du coup, la série  $((f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}) = f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(0)}$$

et par construction, la série  $((\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_1))_{n \in \mathbb{N}}$  converge. D'après le théorème de convergence en moyenne,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |f - f_{\varphi(n)}| = \int_I \left| \sum_{k=n}^{\infty} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n, p \geq N \quad \|f_{n+p} - f_n\|_1 \leq \varepsilon$$

Quitte à choisir  $N$  plus grand, on peut aussi supposer que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$$

Comme  $\varphi$  est strictement croissante, on a  $\varphi(N) \geq N$ . On a

$$\forall n \geq N \quad \|f_n - f_{\varphi(N)}\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f - f_{\varphi(N)}\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$$

d'où  $\forall n \geq N \quad \|f - f_n\| \leq 2\varepsilon$  □

### 8.4.3 Le théorème de convergence dominée

#### Théorème 8.4.6 (Théorème de convergence dominée)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues par morceaux sur  $I$ , convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . On suppose qu'il existe une fonction  $\varphi$ , continue par morceaux sur  $I$ , intégrable, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors toutes les fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ainsi que  $f$ , sont intégrables sur  $I$ ; de plus, la suite  $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_I f$ .

Pour prouver ce théorème, on commence par rappeler un résultat démontré en exercice l'année dernière (voir **exercice 19** sur les suites).

#### Théorème 8.4.7

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle bornée. On suppose que toutes ses sous-suites convergentes ont la même limite  $\ell$ ; alors  $u$  converge vers  $\ell$ .

On utilisera ce théorème pour prouver le

#### Lemme 8.4.8

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions positives continues par morceaux sur  $[a; b]$ , convergeant simplement vers 0. On suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_{\infty} \leq M$$

Alors la suite  $\left(\int_{[a; b]} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**Preuve :** Posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_{[a; b]} f_n$$

On commence par supposer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, vers une limite  $\ell$  finie.

Si  $n \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$F_n = \left\{ \sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k \mid p \in \mathbb{N} \quad a_n, \dots, a_{n+p} \geq 0 \quad \sum_{k=n}^{n+p} a_k = 1 \right\}$$

$$d_n = \inf_{f \in F_n} \int_{[a; b]} f^2$$

Par définition de l'Inf, il existe  $g_n \in F_n$  tel que

$$d_n \leq \int_{[a; b]} g_n^2 \leq d_n + \frac{1}{n}$$

Comme  $g_n \in F_n$ , il existe un entier  $p_n$  et des réels positifs  $(\alpha_k^{(n)})_{n \leq k \leq n+p_n}$  tels que

$$g_n = \sum_{k=n}^{n+p_n} \alpha_k^{(n)} f_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{n+p_n} \alpha_k^{(n)} = 1$$

Il y a maintenant plusieurs choses à remarquer :

- La suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. En effet, si  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in F_{n+1}$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  et des réels positifs  $(\alpha_k)_{n+1 \leq k \leq n+1+p}$  tels que

$$f = \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \alpha_k f_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \alpha_k = 1$$

donc 
$$f = 0 \times f_n + \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \alpha_k f_k \quad \text{avec} \quad 0 + \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \alpha_k = 1$$

ce qui prouve que  $f \in F_n$ . Par suite,

$$\forall f \in F_{n+1} \quad d_n \leq \int_{[a;b]} f^2$$

d'où 
$$d_n \leq d_{n+1}$$

- La suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$g_n = \sum_{k=n}^{n+p_n} \alpha_k^{(n)} f_k \leq \sum_{k=n}^{n+p_n} \alpha_k^{(n)} M = M$$

donc 
$$g_n^2 \leq M^2$$

et 
$$\int_{[a;b]} g_n^2 \leq (b-a)M^2$$

d'où 
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n \leq \int_{[a;b]} g_n^2 \leq (b-a)M^2$$

- La suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante majorée donc convergente.
- La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0. En effet, soit  $\varepsilon > 0$ ; puisque  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0, si  $x \in [a; b]$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N \quad f_n(x) \leq \varepsilon$$

Soit  $n \geq N$ . On a

$$0 \leq g_n(x) = \sum_{k=n}^{n+p_n} \alpha_k^{(n)} f_k(x) \leq \sum_{k=n}^{n+p_n} \alpha_k^{(n)} \varepsilon = \varepsilon$$

d'où 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$$

- La suite  $\left( \int_{[a;b]} g_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  : même chose que pour le point précédent.
- La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy pour  $\| \cdot \|_1$ . En effet, si  $n$  et  $p$  sont deux entiers, on a

$$\begin{aligned} \int_{[a;b]} (g_{n+p} - g_n)^2 &= \int_{[a;b]} g_{n+p}^2 + \int_{[a;b]} g_n^2 - 2 \int_{[a;b]} g_n g_{n+p} \\ &= 2 \int_{[a;b]} g_n^2 + 2 \int_{[a;b]} g_{n+p}^2 - 4 \int_{[a;b]} \left( \frac{g_{n+p} + g_n}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Or, on vérifie facilement que  $\frac{g_{n+p}+g_n}{2}$  est dans  $F_n$  donc

$$d_n \leq \int_{[a; b]} \left( \frac{g_{n+p} + g_n}{2} \right)^2$$

D'où 
$$\int_{[a; b]} (g_{n+p} - g_n)^2 \leq 2d_n + \frac{1}{n} + 2d_{n+p} + \frac{1}{n+p} - 4d_n \leq 2\left(d_{n+p} - d_n + \frac{1}{n}\right)$$

Comme la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, le résultat annoncé s'ensuit.

- D'après la **proposition 3.15**,

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \quad \|g_{n+p} - g_n\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|g_{n+p} - g_n\|_2$$

donc  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy pour  $\| \cdot \|_1$ .

D'après le corollaire du théorème de convergence en moyenne et parce que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_1 = 0$$

c'est-à-dire 
$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} g_n = 0$$

Ceci prouve que  $\ell = 0$ . Donc sous l'hypothèse que  $\left(\int_{[a; b]} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, cette limite est nulle.

Maintenant, revenons au cas général; on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b] \quad 0 \leq f_n(x) \leq M$$

donc 
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_{[a; b]} f_n \leq (b-a)M$$

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(I_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge. En appliquant le résultat précédent à la suite de fonctions  $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , on prouve que  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\varphi(n)} = 0$ .

Ainsi, toutes les sous-suites convergentes de  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ont une limite nulle. D'après le **théorème 4.6**, la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. □

**Preuve du théorème de convergence dominée :** Il suffit de traiter le cas où  $I = [a; b]$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ . On sait que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  et qu'il existe  $\varphi$  intégrable sur  $[a; b]$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b[ \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Ceci assure immédiatement que chaque  $f_n$  est intégrable sur  $[a; b]$ . Et en passant à la limite,

$$\forall x \in [a; b[ \quad |f(x)| \leq \varphi(x)$$

Donc  $f$  est également intégrable sur  $I$ . Posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b[ \quad g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$$

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues par morceaux sur  $[a; b]$ , positives, convergeant simplement vers 0 et l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b[ \quad 0 \leq g_n(x) \leq 2\varphi(x)$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\varphi$  est intégrable sur  $[a; b]$ , il existe  $c \in ]a; b[$  tel que

$$\int_{[c; b]} \varphi \leq \varepsilon$$

D'autre part, comme  $\varphi$  est continue par morceaux sur  $[a; c]$ , elle est majorée sur ce compact par un réel strictement positif  $M$ . Et on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; c] \quad 0 \leq g_n(x) \leq 2M$$

D'après le **lemme 4.7**, la suite  $\left(\int_{[a; c]} g_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N \quad \int_{[a; c]} g_n \leq \varepsilon$$

Il s'ensuit

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq \int_{[a; b]} g_n \leq 3\varepsilon$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} |f - f_n| = 0$$

Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_{[a; b]} f - \int_{[a; b]} f_n \right| \leq \int_{[a; b]} |f - f_n|$$

Donc  $\left(\int_{[a; b]} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_{[a; b]} f$ . □

### 8.4.4 Le théorème de continuité

Nous avons obtenu un théorème de continuité pour les intégrales à paramètres dans le chapitre précédent. Ici, on applique le théorème de convergence dominée pour en donner une version plus forte. Dans ce paragraphe,  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

#### **Théorème 8.4.9 (Théorème fort de continuité sous l'intégrale)**

Soit  $f : I \times A \rightarrow \mathbb{K}$ , telle que :

- Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $a \mapsto f(t, a)$  est continue sur  $A$ ;
- Pour tout  $a \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(t, a)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- Il existe une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ , intégrable, telle que

$$\forall (t, a) \in I \times A \quad |f(t, a)| \leq \varphi(t)$$

Alors pour chaque  $a \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(t, a)$  est intégrable sur  $I$ . De plus, la fonction

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{K} \\ a &\mapsto \int_I f(t, a) dt \end{aligned}$$

est continue sur  $A$ .

**Preuve :** Si  $a \in A$  est fixé, on a

$$\forall t \in I \quad |f(t, a)| \leq \varphi(t)$$

Comme  $t \mapsto f(t, a)$  est continue par morceaux, dominée par une fonction intégrable, elle est bien intégrable. Ceci permet de définir :

$$\forall a \in A \quad F(a) = \int_I f(t, a) dt$$



Montrons que  $f$  est continue en chaque point de  $A$ ; si  $a \in A$ , on prend une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$ , qui converge vers  $a$ . Et on définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad f_n(t) = f(t, a_n)$$

Si  $t \in I$ , on sait que  $x \mapsto f(t, x)$  est continue en  $a$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  existe et vaut  $f(t, a)$ . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| = |f(t, a_n)| \leq \varphi(t)$$

D'après le **théorème de convergence dominée**, la suite  $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_I f(t, a) dt$ . Or,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I f_n = \int_I f(t, a_n) dt = F(a_n)$$

On a donc montré que, pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$ , convergeant vers  $a$ , la suite  $(F(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F(a)$ . D'après la **caractérisation séquentielle de la continuité**,  $F$  est continue en  $a$ . □

**Exemple 8.4.10**

Posons

$$\forall t, x > 0 \quad f(t, x) = t^{x-1} e^{-t}$$

Si  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; si  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , intégrable (voir **exemple 2.2**). Ceci nous autorise à poser

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

De plus, si  $0 < \varepsilon < A$ , on a

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in [\varepsilon; A] \quad |f(t, x)| \leq f(t, A) + f(t, \varepsilon)$$

Le théorème de continuité assure que  $\Gamma$  est continue sur  $[\varepsilon; A]$ . Comme  $A$  et  $\varepsilon$  étaient quelconques,  $\Gamma$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**8.4.5 Le théorème de dérivation**

On obtient aussi une version forte du théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres. À nouveau,  $I$  et  $A$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 8.4.11 (Théorème fort de dérivation sous l'intégrale)**

Soit  $f : I \times A \rightarrow \mathbb{K}$ , telle que :

- Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $a \mapsto f(t, a)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ ; sa fonction dérivée est notée  $a \mapsto \partial_2 f(t, a)$
- Pour tout  $a \in I$ , les fonctions  $t \mapsto f(t, a)$  et  $t \mapsto \partial_2 f(t, a)$  sont continues par morceaux sur  $I$ .
- Il existe des fonctions  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ , intégrables, telles que

$$\forall (t, a) \in I \times A \quad |f(t, a)| \leq \varphi(t) \quad \text{et} \quad |\partial_2 f(t, a)| \leq \psi(t)$$

Alors pour chaque  $a \in A$ , les fonctions  $t \mapsto f(t, a)$  et  $t \mapsto \partial_2 f(t, a)$  sont intégrables sur  $I$ . De plus, la fonction

$$F : A \rightarrow \mathbb{K} \\ a \mapsto \int_I f(t, a) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall a \in A \quad F'(a) = \int_I \partial_2 f(t, a) dt$$

**Preuve :** L'existence et la continuité de  $F$  sont acquises par le **théorème de continuité**. De même pour la fonction

$$\begin{aligned} G: A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \int_{[a; b]} \partial_2 f(t, a) dt \end{aligned}$$

Il reste juste à prouver que  $F$  est dérivable sur  $A$  et que sa dérivée est  $G$ . Fixons  $a \in A$ . On pose

$$\forall (t, x) \in I \times A \quad g(t, x) = \begin{cases} \frac{f(t, x) - f(t, a)}{x - a} - \partial_2 f(t, a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Pour chaque  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto g(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$ , intégrable sur  $I$ . Pour chaque  $t \in A$ , la fonction  $x \mapsto g(t, x)$  est continue sur  $I$ . En outre, parce que  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ , de dérivée  $x \mapsto \partial_2 f(t, x)$  qui est majorée par  $\psi(t)$ , on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in A \quad |f(t, x) - f(t, a) - (x - a)\partial_2 f(t, a)| \leq |x - a|\psi(t)$$

d'où 
$$\forall x \in A \setminus \{a\} \quad |g(t, x)| \leq \psi(t)$$

Comme  $g$  est continue en  $a$ , on a aussi

$$\forall x \in A \quad |g(t, x)| \leq \psi(t)$$

Toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème précédent : la fonction

$$\begin{aligned} H: A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_I g(t, x) dt \end{aligned}$$

est continue sur  $A$ . En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow a} H(x) = \int_I g(t, a) dt = 0$$

Or, 
$$\forall x \in A \setminus \{a\} \quad H(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - G(a)$$

On a ainsi prouvé que  $F$  est dérivable en  $a$ , et que  $F'(a) = G(a)$ . Comme  $G$  est continue, on a gagné.  $\square$

Le théorème suivant est énoncé sans preuve, parce que c'est une récurrence, simple mais désagréable.

**Corollaire 8.4.12 (Théorème fort de dérivation  $k$  fois sous l'intégrale)**

Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $f : I \times A \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que

- Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $a \mapsto f(t, a)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $A$ ; pour tout  $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ , on note  $a \mapsto \partial_2^j f(t, a)$  sa dérivée  $j$ -ème.
- Pour tout  $a \in I$  et pour tout  $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ , la fonction  $t \mapsto \partial_2^j f(t, a)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Il existe des fonctions  $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ , continues par morceaux sur  $I$ , à valeurs positives, intégrables, telles que

$$\forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket \quad \forall (t, a) \in I \times A \quad |\partial_2^j f(t, a)| \leq \varphi_j(t)$$

Alors pour chaque  $a \in A$  et pour chaque  $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ , la fonction  $t \mapsto \partial_2^j f(t, a)$  est intégrable sur  $I$ . De plus, la fonction

$$F : A \rightarrow \mathbb{K} \\ a \mapsto \int_I f(t, a) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $A$  et

$$\forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket \quad \forall a \in A \quad F^{(j)}(a) = \int_I \partial_2^j f(t, a) dt$$

**Exemple 8.4.13**

Reprenons la fonction  $f$  de l'exemple précédent et

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x) = t^{x-1} \exp(-t)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; de plus,

$$\forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket \quad \forall t, x > 0 \quad \partial_2^j f(t, x) = (\ln t)^j t^{x-1} e^{-t}$$

Fixons  $0 < \varepsilon < A$  et  $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ . On a

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in ]0; A] \quad |\partial_2^j f(t, x)| = (|\ln t|)^j t^{x-1} e^{-t} \leq |\partial_2^j f(t, A)| + |\partial_2^j f(t, \varepsilon)|$$

Il est facile de vérifier que  $t \mapsto \partial_2^j f(t, A)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

- Au voisinage de  $0^+$  : on a pris  $A > 0$  donc  $1 - A < 1$  ce qui permet de choisir un  $B \in ]1 - A; 1[$ . On fait ceci pour assurer que

$$B < 1 \quad \text{et} \quad B + A - 1 > 0$$

De cette manière, 
$$t^B |\partial_2^j f(t, A)| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{B+A-1} |\ln t|^j \underset{t \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0$$

et 
$$|\partial_2^j f(t, A)| \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(t^{-B})$$

Comme  $t \mapsto t^{-B}$  est intégrable au voisinage de 0 parce que  $B < 1$ , on voit que  $\partial_2^j f(t, A)$  est intégrable au voisinage de 0.

- Au voisinage de  $+\infty$  : la présence de l'exponentielle permet d'obtenir immédiatement

$$|\partial_2^j f(t, A)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$$

De même,  $t \mapsto \partial_2^j f(t, \varepsilon)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Tout ceci permet d'appliquer le théorème de dérivation :  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[\varepsilon; A]$  et

$$\forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket \quad \forall x \in ]0; A[ \quad \Gamma^{(j)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^j t^{x-1} e^{-t} dt$$

Mais  $\varepsilon$ ,  $A$  et  $k$  étaient quelconques. Donc finalement,  $\Gamma$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$