

Chapitre 7

Dérivation et intégration

L'année dernière, on n'a étudié que la dérivabilité et l'intégrabilité des fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Ces notions peuvent être facilement généralisées à des fonctions qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel normé. Le cours d'analyse de Mathématiques Supérieures est supposé acquis.

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} qui contient au moins deux points et E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

7.1 Dérivation

7.1.1 Définitions et propriétés immédiates

Définition 7.1.1 (Dérivabilité)

Soient f une application de I dans E et $a \in I$.

- On dit que f est *dérivable à droite en a* si, et seulement si, $a \neq \text{Sup}I$ et l'application

$$\begin{aligned}]a; +\infty[\cap I &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

a une limite en a . Dans ce cas, cette limite est unique et notée $f'_d(a)$.

- On dit que f est *dérivable à gauche en a* si, et seulement si, $a \neq \text{Inf}I$ et l'application

$$\begin{aligned}]-\infty; a[\cap I &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

a une limite en a . Dans ce cas, cette limite est unique et notée $f'_g(a)$.

- On dit que f est *dérivable en a* si, et seulement si, l'application

$$\begin{aligned} I \setminus \{a\} &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

a une limite en a . Dans ce cas, cette limite est unique et notée $f'(a)$.

- Enfin, on dira que f est *dérivable sur I* si, et seulement si, f est dérivable en tout point de I . L'ensemble des fonctions à valeurs dans E dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I, E)$.

Faisons tout de suite quelques remarques.

1. Toutes ces notions dépendent de la norme choisie sur E . Mais si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc si f est dérivable (resp. à gauche, à droite) en a pour une norme N , elle l'est aussi pour toute autre norme N' .
2. Si E est de dimension finie et une base \mathcal{B} de E est fixée, la dérivabilité de f (resp. à gauche, à droite) équivaut à la dérivabilité de toutes les applications coordonnées de f et le vecteur dérivé (resp. à gauche, à droite) est obtenu en recomposant suivant la base.
Plus précisément, notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et f_1, \dots, f_p les applications coordonnées de f . Alors f est dérivable en a si, et seulement si, f_1, \dots, f_p sont dérivables en a et dans ce cas,

$$f'(a) = \sum_{k=1}^p f'_k(a) e_k$$

De même pour une fonction dérivable à gauche ou à droite.

En particulier, si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $(1, i)$ est une base de E et les coordonnées de f sont $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$. Donc f est dérivable en a si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Dans ce cas, $f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + (\operatorname{Im} f)'(a)$.

3. Si a est un point intérieur à I , alors f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et les vecteurs $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ sont égaux.
Si $a = \inf I$, alors f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite en a ; dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a)$.
Et si $a = \sup I$, alors f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à gauche en a . Auquel cas, $f'(a) = f'_g(a)$.
4. Une fonction f dérivable à droite en a a une limite à droite en a et cette limite est $f(a)$. En effet,

$$\forall x \in]a; +\infty[\cap I \quad f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

Or,
$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$$

donc $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$ existe et vaut 0. Par suite, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

De même, une fonction f dérivable à gauche en a a une limite à gauche en a et cette limite est $f(a)$.

Par suite, une fonction qui est dérivable à gauche et à droite en a est automatiquement continue en a . En particulier, une fonction dérivable en a est continue en a .

5. Les règles de calcul sur les limites prouvent immédiatement que $\mathcal{D}^1(I, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1(I, E) &\longrightarrow E^I \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

est linéaire.

Proposition 7.1.2

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés. Soit f une fonction dérivable en $a \in I$. Soit u une application linéaire continue de E dans F . Alors $u \circ f$ est dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.

Preuve : On a $\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \frac{u(f(x)) - u(f(a))}{x - a} = u\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$

parce que u est linéaire. En outre, f est dérivable donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Enfin, u est continue en $f'(a)$ donc $\lim_{x \rightarrow a} u\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$ existe et vaut $u(f'(a))$. □

Proposition 7.1.3

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient E_1, \dots, E_n et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés. Soit g une application n -linéaire de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F . Pour chaque $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on se donne une application $f_i : I \rightarrow E_i$, dérivable en a . Posons

$$\forall x \in I \quad L(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Alors g est dérivable en a et

$$g'(a) = \sum_{i=1}^n g(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f'_i(a), f_{i+1}(a), \dots, f_n(a))$$

Preuve : On démontre ceci par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est précisément la **proposition 1.2**.

Soit $n \geq 1$ un entier pour lequel l'énoncé est vrai. On se donne E_1, \dots, E_{n+1} des \mathbb{K} -espaces vectoriels; pour chaque $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, $f_i : I \rightarrow E_i$ est une application dérivable en a . Enfin, on se donne $g : E_1 \times \dots \times E_{n+1} \rightarrow F$ une application $(n+1)$ -linéaire continue.

On sait alors que l'application

$$\begin{aligned} g_{n+1} : E_1 \times \dots \times E_n &\rightarrow F \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto g(u_1, \dots, u_n, f_{n+1}(a)) \end{aligned}$$

est n -linéaire et continue. Si l'on pose

$$\forall x \in I \quad L_{n+1}(x) = g_{n+1}(f_1(x), \dots, f_n(x)) = g(f_1(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(a))$$

on sait d'après l'hypothèse de récurrence que L_{n+1} est dérivable en a et

$$\begin{aligned} L'_{n+1}(a) &= \sum_{i=1}^n g_{n+1}(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f'_i(a), f_{i+1}(a), \dots, f_n(a)) \\ &= \sum_{i=1}^n g(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f'_i(a), f_{i+1}(a), \dots, f_n(a), f_{n+1}(a)) \end{aligned}$$

Il reste alors à remarquer que pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} g(f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)) - \underbrace{g(f_1(a), \dots, f_{n+1}(a))}_{=L_{n+1}(a)} &= L_{n+1}(x) - L_{n+1}(a) + g(f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)) - L_{n+1}(x) \\ &= (L_{n+1}(x) - L_{n+1}(a)) \\ &\quad + g(f_1(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a)) \end{aligned}$$

On sait que f_1, \dots, f_{n+1} sont dérivables en a donc

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = f_i(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a)}{x - a} = f'_{n+1}(a)$$

Comme g est continue au point $(f_1(a), \dots, f_n(a), f'_{n+1}(a))$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow a} g\left(f_1(x), \dots, f_n(x), \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a)}{x - a}\right) = g(f_1(a), \dots, f_n(a), f'_{n+1}(a))$$

Ceci assure que $\lim_{x \rightarrow a} (g(f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)) - g(f_1(a), \dots, f_{n+1}(a)))$ existe et vaut

$$L'_{n+1}(a) + g(f_1(a), \dots, f_n(a), f'_n(a))$$

Compte-tenu de l'expression de $L'_{n+1}(a)$ donnée par l'hypothèse de récurrence, cette formule est exactement celle qu'on voulait. \square

Corollaire 7.1.4 (Dérivation d'un déterminant)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soient f_1, \dots, f_n des fonctions définies sur I , à valeurs dans E et dérivables en $a \in I$. Soit \mathcal{B} une base de E . L'application $L : x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(x), \dots, f_n(x))$ est dérivable en a et

$$L'(a) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f'_i(a), f_{i+1}(a), \dots, f_n(a))$$

Corollaire 7.1.5 (Dérivation d'un produit)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow E$ des applications dérivables en $a \in I$. Alors λf est dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda'(a) f(a) + \lambda(a) f'(a)$$

Preuve : Ceci résulte de la **proposition 1.3** et du fait que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\mu, u) &\mapsto \mu u \end{aligned}$$

est bilinéaire continue. \square

Corollaire 7.1.6 (Dérivation d'un produit scalaire)

Soient E un espace préhilbertien, f et g deux applications définies sur I , à valeurs dans E , dérivables en $a \in I$. Alors $s : x \mapsto \langle f(x) | g(x) \rangle$ est dérivable en a et

$$s'(a) = \langle f'(a) | g(a) \rangle + \langle f(a) | g'(a) \rangle$$

En particulier, $x \mapsto \|f(x)\|^2$ est dérivable en a et

$$(\|f\|^2)'(a) = \begin{cases} 2\langle f(a) | f'(a) \rangle & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 2\operatorname{Re}\langle f'(a) | f(a) \rangle & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Preuve : Conséquence de la continuité du produit scalaire sur E^2 , et de la **proposition 1.3**. \square

On passe maintenant rapidement aux questions de composition de fonctions dérivables. Le résultat et la preuve sont exactement les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 7.1.7

Soient I et J deux intervalles. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$, telle que $\varphi(I) \subset J$; soit $f : J \rightarrow E$ dérivable en $f(a)$. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et

$$(f \circ \varphi)'(a) = f'(\varphi(a)) \varphi'(a)$$

Évidemment, pour des raisons de simplicité, les théorèmes précédents ont été énoncés pour des fonctions dérivables. Mais ils peuvent être sans problème généralisés : il suffit de remplacer le mot « dérivable » par « dérivable à gauche » partout où il apparaît. De même avec « dérivable à droite. »

7.1.2 L'inégalité des accroissements finis

Pour les fonctions à valeurs réelles, l'inégalité des accroissements finis était une conséquence très facile du théorème de Rolle. Malheureusement, pour les fonctions à valeurs vectorielles, le théorème de Rolle n'est plus vrai, comme le prouve l'exemple de la fonction $t \mapsto \exp(it)$, qui prend la même valeur en 0 et 2π , mais dont la dérivée ne s'annule jamais.

Ceci dit, il ne faut pas se décourager : Rolle n'est pas une nécessité pour prouver cette inégalité. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.1.8

Soient $a < b$ des nombres réels. Soient $f : [a; b] \rightarrow E$ et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues et dérivables $[a; b]$ telles que

$$\forall x \in]a; b[\quad \|f'(x)\| \leq g'(x)$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Preuve : On fixe un $\varepsilon > 0$ et on considère l'ensemble

$$A = \{x \in [a; b] \mid \forall t \in [a; x] \quad \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a)\}$$

On voit que A n'est pas vide car $a \in A$ donc A a une borne supérieure, notée $s \in [a; b]$. La démonstration nécessite plusieurs étapes :

- On commence par montrer que $s \in A$. Si $s = a$, on a gagné donc supposons $a < s$. Par définition de s , on peut trouver une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante d'éléments de A qui converge vers s . En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f(s_n) - f(a)\| \leq g(s_n) - g(a) + \varepsilon(s_n - a)$$

Mais par continuité de f , g et la valeur absolue, on peut passer à la limite et en déduire que

$$\|f(s) - f(a)\| \leq g(s) - g(a) + \varepsilon(s - a)$$

Ensuite, donnons-nous $t \in]a; s[$. Par définition du supremum et parce que $s - t > 0$, il existe $u \in]t; s[$ qui soit aussi dans A . Ce qui assure que

$$\|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a)$$

On a bien montré

$$\forall t \in [a; s] \quad \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a)$$

ce qui équivaut à dire que $s \in A$.

- On montre ensuite que $s = b$. On procède, par exemple, par l'absurde, et on suppose que $s < b$, de sorte que $h = b - s$ est strictement positif. On sait que f et g sont dérivables en s donc on peut trouver $\eta \in]0; h[$ tel que

$$\forall x \in [s; s + \eta] \quad \begin{cases} \|f(x) - f(s) - f'(s)(x - s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x - s) \\ |g(x) - g(s) - g'(s)(x - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x - s) \end{cases}$$

On déduit de la première inégalité que

$$\forall x \in [s; s + \eta] \quad \|f(x) - f(s)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|f'(s)\|\right)(x - s) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + g'(s)\right)(x - s)$$

Tandis que la deuxième inégalité fournit

$$\forall x \in [s; s + \eta] \quad g'(s)(x - s) \leq \frac{\varepsilon}{2}(x - s) + g(x) - g(s)$$

En combinant ces deux relations, il vient

$$\forall x \in [s; s + \eta] \quad \|f(x) - f(s)\| \leq \varepsilon(x - s) + g(x) - g(s)$$

En outre, on a vu au cours du premier point que

$$\|f(s) - f(a)\| \leq g(s) - g(a) + \varepsilon(s - a)$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite, } \forall x \in [s; s + \eta] \quad \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(s)\| + \|f(s) - f(a)\| \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) \end{aligned}$$

Enfin, parce que $s \in A$, on sait que

$$\forall x \in [a; s] \quad \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a)$$

$$\text{Au final, } \forall x \in [a; s + \eta] \quad \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a)$$

ce qui prouve que $s + \eta \in A$. Ceci contredit le fait que s est la borne supérieure de A . Ceci achève de prouver que $s = b$ et $b \in A$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a; b] \quad \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a)$$

Il suffit alors de fixer x et faire tendre ε vers 0 pour conclure. □

Corollaire 7.1.9 (Inégalité des accroissements finis)

Soient $a < b$ des réels, soit $f : [a; b] \rightarrow E$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, telle que f' est bornée sur $]a; b[$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \sup_{]a; b[} \|f'\|$$

Preuve : Posons $M = \sup_{]a; b[} \|f'\|$. On se donne deux réels x et y dans $]a; b[$ tels que $x < y$. La fonction f est continue et dérivable sur $[x; y]$ et l'on a

$$\forall t \in [x; y] \quad \|f'(t)\| \leq M$$

D'après le lemme,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M(y - x)$$

Comme f est continue sur $[a; b]$ et cette inégalité est vraie pour tous $x < y$ dans $]a; b[$, on en déduit en passant à la limite que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a) \quad \square$$

Corollaire 7.1.10 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit $f : I \rightarrow E$ continue et dérivable sur I , telle que

$$\forall t \in I \quad f'(t) = 0$$

Alors f est constante sur I .

Preuve : Fixons un $x \in I$ et notons $C = f(x)$. Soit $a \in I$. Supposons d'abord $a < x$. Comme f est continue sur $[a; x]$, dérivable sur $]a; x[$ et de dérivée nulle sur $]a; x[$, l'inégalité des accroissements finis fournit

$$\|f(x) - f(a)\| \leq 0$$

donc $f(a) = C$. Comme a était quelconque strictement inférieur à x , on voit que f est constante égale à C sur $I \cap]-\infty; x[$.

De la même manière, f est constante égale à C sur $I \cap]x; +\infty[$.

Donc f est constante égale à C sur I . □.

7.1.3 L'inégalité de Taylor-Lagrange

À nouveau, on va devoir ruser pour obtenir une inégalité du type Taylor-Lagrange, puisque dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on l'avait démontrée à partir du théorème de Rolle. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de I dans E , qui sont n fois dérivables. Si $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, ses dérivées successives sont notées $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$. Enfin, on note $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ telles que $f^{(n)}$ est continue. L'ensemble des fonctions continues sur I est aussi noté $\mathcal{C}^0(I, E)$.

Il est clair, d'après l'observation qu'une fonction dérivable est continue, que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad n \leq m \implies (\mathcal{D}^m(I, E) \subset \mathcal{D}^n(I, E) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^m(I, E) \subset \mathcal{C}^n(I, E))$$

et
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{D}^n(I, E) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I, E)$$

Théorème 7.1.11 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, E) \cap \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$. On suppose que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I . Alors

$$\forall a, b \in I \quad a < b \quad \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \text{Sup}_{[a;b]} \|f^{(n+1)}\|$$

Preuve : On fixe $a, b \in I$ avec $a < b$ et on pose

$$\forall x \in [a; b] \quad F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

On remarque tout de suite que $F(b) = f(b)$. Également, parce que $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$, on voit que F est continue et dérivable sur $[a; b]$ et que

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad F'(x) &= - \sum_{k=1}^n \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

Mais $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a; b]$ donc F' est aussi bornée sur $[a; b]$ et l'on a

$$\forall x \in [a; b] \quad \|F'(x)\| = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}(x)\| \leq \frac{(b-x)^n}{n!} \text{Sup}_{[a;b]} \|f^{(n+1)}\|$$

En posant
$$\forall x \in [a; b] \quad g(x) = - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \text{Sup}_{[a;b]} \|f^{(n+1)}\|$$

on a
$$\forall x \in [a; b] \quad \|f'(x)\| \leq g'(x)$$

L'inégalité des accroissements finis fournit l'estimation souhaitée :

$$\|F(b) - F(a)\| \leq g(b) - g(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{Sup}_{[a;b]} \|f^{(n+1)}\|$$

Corollaire 7.1.12 (Théorème de continuité de la dérivée)

Soient $a < b$ des réels. Soit $f : [a; b] \rightarrow E$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b]$, telle que $\lim_{a^+} f'$ existe. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{a^+} f'$.

Preuve : Supposons que $\ell = \lim_{a^+} f' = 0$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a; a + \eta] \quad \|f'(x)\| \leq \varepsilon$$

Maintenant, fixons $x < y$ dans $]a; a + \eta]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\|f(x) - f(y) - f'(y)(y - x)\| \leq \varepsilon(y - x)$$

Cette inégalité est vraie pour tous $x < y$ et f est continue en a . Donc en passant à la limite sur x en a , on a

$$\forall y \in]a; a + \eta] \quad \|f(a) - f(y) - f'(y)(y - a)\| \leq \varepsilon(y - a)$$

Par suite, $\forall y \in]a; a + \eta]$
$$\|f(a) - f(y)\| \leq \|f(a) - f(y) - f'(y)(y - a)\| + \|f'(y)\|(y - a) \leq 2\varepsilon(y - a)$$

Comme ε était quelconque, on a établi que f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Maintenant, dans le cas où $\ell \neq 0$, on applique le résultat qu'on vient de démontrer à la fonction $g : x \mapsto f(x) - \ell(x - a)$. On obtient que g est dérivable en a et $g'(a) = 0$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, parce que

$$\forall x \in [a; b] \quad f(x) = g(x) + \ell(x - a) \quad \square$$

Corollaire 7.1.13 (Extension aux applications de classe \mathcal{C}^k)

Soient $a < b$ des réels et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [a; b] \rightarrow E$, continue sur $[a; b]$, de classe \mathcal{C}^k sur $]a; b]$ et telle que

$$\forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \lim_{a^+} f^{(j)} \text{ existe}$$

Alors f est de classe \mathcal{C}^k sur $[a; b]$.

Preuve : C'est une simple récurrence, en utilisant successivement le théorème de continuité de la dérivée. □

7.1.4 Fonctions régulières par morceaux

Il faut accepter un fait : les fonctions régulières (c'est-à-dire qui sont continues, ou suffisamment dérivables) sont très rares. Par exemple, si f est continue sur $[a; b]$, il suffit de changer sa valeur en un point pour obtenir une fonction non continue. On va, dans la suite, considérer des fonctions un peu plus générales, qu'on appelle régulières par morceaux; intuitivement, ces fonctions sont régulières sur un nombre fini d'intervalles dont la réunion est $[a; b]$.

On rappelle que $\mathcal{B}([a; b], E)$ désigne l'espace vectoriel des applications de $[a; b]$ dans E , bornées. C'est-à-dire qu'une application $f : [a; b] \rightarrow E$ est dans $\mathcal{B}([a; b], E)$ si, et seulement si,

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a; b] \quad \|f(x)\| \leq M$$

Dans ce cas, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a; b]} \|f(x)\|$$

On fera bien attention aux notations : si $f \in \mathcal{B}([a; b], E)$, il ne faut pas confondre $\|f\|$ et $\|f\|_\infty$. En effet, $\|f\|$ est la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ tandis que $\|f\|_\infty$ est le sup de la fonction $\|f\|$ sur $[a; b]$.

Définition 7.1.14 (Subdivision d'un segment)

On appelle *subdivision de $[a; b]$* toute partie finie $A \subset [a; b]$ qui contient a et b .

Si A est une subdivision de $[a; b]$, c'est un ensemble fini inclus dans $[a; b]$ qui contient a et b ; si l'on note $n = |A| - 1$, on sait qu'on peut ordonner A d'une et une seule manière. Il existe une suite finie $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ strictement croissante :

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$$

telle que $A = \{a_k \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$. De ce fait, on peut partitionner $[a; b]$ à l'aide de A de la manière suivante :

$$[a; b] = A \cup \bigcup_{0 \leq k \leq n-1}]a_k; a_{k+1}[$$

Définition 7.1.15 (Finesse d'une subdivision)

Soient A et B deux subdivisions de $[a; b]$. On dit que B est *plus fine que A* si, et seulement si, $A \subset B$.

Définition 7.1.16 (Fonctions régulières par morceaux)

Soient $a < b$ des réels et $k \in \mathbb{N}$. Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ une application. On dit que f est de *classe \mathcal{C}^k par morceaux sur $[a; b]$* si, et seulement si, il existe une subdivision $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ de $[a; b]$ telle que

- pour chaque $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, f est de classe \mathcal{C}^k sur $]a_k; a_{k+1}[$;
- pour chaque $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, f admet un prolongement par continuité à $[a_k; a_{k+1}]$, tel que la fonction prolongée est \mathcal{C}^k sur $[a_k; a_{k+1}]$.

Une telle subdivision sera dite adaptée à f .

L'ensemble des fonctions \mathcal{C}^k par morceaux sur $[a; b]$, à valeurs dans E , sera noté $\mathcal{C}_{pm}^k([a; b], E)$.

Lemme 7.1.17

Soient $a < b$ des réels, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}^k([a; b], E)$. Soit A une subdivision adaptée à f . Toute subdivision plus fine est aussi adaptée à f .

Preuve : Trivial, par récurrence, en ajoutant un point à la fois. □

Corollaire 7.1.18

Soient $a < b$ des réels et $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}^k([a; b], E)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{B}([a; b], E)$.

Preuve : Pour obtenir la structure d'espace vectoriel, il suffit de reprendre la preuve faite l'an dernier pour les fonctions à valeurs réelles.

Si $f \in \mathcal{C}^k([a; b], E)$, on se donne une subdivision $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ adaptée à f . Si $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on sait que f est continue sur $]a_k; a_{k+1}[$ prolongeable par continuité à $[a_k; a_{k+1}]$; cet intervalle est compact, le prolongement est donc borné et f est bornée sur $]a_k; a_{k+1}[$. Par suite, f est bornée sur $[a_k; a_{k+1}]$. Du coup, f est bornée sur $[a; b]$ puisque, par définition, une subdivision est finie. \square

Théorème 7.1.19 (Caractérisation des fonctions \mathcal{C}^k par morceaux)

Soient $a < b$ des réels et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ une application. Alors f est \mathcal{C}^k par morceaux sur $[a; b]$ si, et seulement si, il existe une subdivision $A = \{a_0 < \dots < a_n = b\}$ de $[a; b]$ telle que pour chaque $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$,

- f est \mathcal{C}^k sur $]a_i; a_{i+1}[$, prolongeable par continuité à $[a_i; a_{i+1}]$;
- $\lim_{x \rightarrow a_i^+} f^{(j)}$ et $\lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} f^{(j)}$ existent pour $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$.

Preuve : Immédiat en utilisant le corollaire 1.13. \square

7.2 Intégration sur un segment

Nous allons maintenant généraliser l'intégrale, construite l'année dernière pour des fonctions à valeurs complexes, aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé. Dans toute la suite, la lettre E désigne un espace de Banach.

7.2.1 Intégrale des fonctions en escalier

La construction commence à nouveau par l'étude des fonctions en escalier. Commençons par rappeler la définition d'une subdivision d'un intervalle fermé. Lorsque rien n'est précisé, a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

Définition 7.2.1 (Fonctions en escalier)

Soit f une fonction définie sur $[a; b]$, à valeurs dans E . On dit que f est en escalier si, et seulement si, il existe une subdivision $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ de $[a; b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$ pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Si f est en escalier et si A est une subdivision qui a cette propriété, on dit que A est une subdivision adaptée à f .

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$ à valeurs dans E est noté $\mathcal{E}([a; b], E)$.

La seule différence avec la définition utilisée l'année dernière est que cette fois, une fonction en escalier est à valeurs vectorielles. Si $f \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et si $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f , il existe des vecteurs c_0, \dots, c_{n-1} tels que

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad f(x) = c_i$$

Lemme 7.2.2

Soient $f \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et A une subdivision adaptée à f . Toute subdivision plus fine que A est également adaptée à f .

Preuve : Même preuve que l'année dernière : par récurrence, en montrant qu'ajouter un point à une subdivision adaptée fournit encore une subdivision adaptée. \square

Théorème 7.2.3

$\mathcal{E}([a; b], E)$ est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathcal{B}([a; b], E)$.

Preuve : Même preuve que l'année dernière. On prend $f, g \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et des scalaires λ et μ . On a des subdivisions A et B , adaptées respectivement à f et g ; alors $A \cup B$ est une subdivision adaptée à la fois à f et g , ce qui permet de voir immédiatement que $\lambda f + \mu g$ est en escalier, avec $A \cup B$ pour subdivision adaptée.

Vérifier qu'une fonction en escalier f est bornée est trivial : si $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f et si on note c_i la valeur prise par f sur $]a_i; a_{i+1}[$ pour chaque i dans $[[0; n - 1]]$, on a aisément

$$\forall x \in [a; b] \quad \|f(x)\| \leq \text{Max}(\|f(a_0)\|, \dots, \|f(a_n)\|, \|c_0\|, \dots, \|c_{n-1}\|) \quad \square$$

Définition 7.2.4 (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soient $f \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et A une subdivision adaptée à f , qu'on énumère :

$$A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$$

Pour tout $i \in [[0; n - 1]]$, on note c_i le vecteur qui est égal à f sur l'intervalle $]a_i; a_{i+1}[$. On appelle *intégrale de f sur $[a; b]$ pour la subdivision A* le vecteur

$$\int_{[a; b]}^A f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) c_i$$

Évidemment, la première chose à remarquer est que l'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend, en fait, pas de la subdivision adaptée choisie.

Lemme 7.2.5

Soient $f \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et A et B deux subdivisions adaptées à f . Alors

$$\int_{[a; b]}^A f = \int_{[a; b]}^B f$$

Ce vecteur, commun à toutes les subdivisions adaptées à f , est appelé *intégrale de f sur $[a; b]$* et noté $\int_{[a; b]} f$.

Preuve : Même chose que l'année dernière : on commence par montrer que l'intégrale par rapport à une subdivision ne change pas si l'on ajoute un point à la subdivision. Par récurrence, l'intégrale ne change pas en passant à une subdivision plus fine. Du coup,

$$\int_{[a; b]}^A f = \int_{[a; b]}^{A \cup B} f = \int_{[a; b]}^B f \quad \square$$

Théorème 7.2.6 (Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions en escalier)

- **Relation de Chasles :** Soit $f \in \mathcal{E}([a; b], E)$. Pour tout $c \in]a; b[, f$ est en escalier sur $[a; c]$ et sur $[c; b]$. De plus,

$$\int_{[a; b]} f = \int_{[a; c]} f + \int_{[c; b]} f$$

- **Linéarité** : L'application $\mathcal{E}([a; b], E) \rightarrow E$ est linéaire.

$$f \mapsto \int_{[a; b]} f$$

- **Inégalité de la moyenne** : $\forall f \in \mathcal{E}([a; b], E) \quad \left\| \int_{[a; b]} f \right\| \leq \int_{[a; b]} \|f\| \leq (b-a) \|f\|_\infty$
- Soient F un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\forall f \in \mathcal{E}([a; b], E) \quad u\left(\int_{[a; b]} f\right) = \int_{[a; b]} u(f)$$

Preuve : La relation de Chasles et la continuité se prouvent exactement de la même manière que pour les fonctions à valeurs réelles.

Montrons les deux propriétés restantes. Soient $f \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ une subdivision adaptée à f . Si $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on note c_i le vecteur de E tel que

$$\forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad f(x) = c_i$$

Alors
$$\|c_i\| = \left\| f\left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2}\right) \right\| \leq \|f\|_\infty$$

Par définition de l'intégrale de f sur $[a; b]$, et parce que la suite $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est croissante, on a

$$\left\| \int_{[a; b]} f \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) c_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{i+1} - a_i| \|c_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \|c_i\|$$

On reconnaît ici l'intégrale sur $[a; b]$ de la fonction $\|f\|$, qui est en escalier et vaut $\|c_i\|$ sur chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$. Et l'on peut aussi dire que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \|c_i\| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = (b-a) \|f\|_\infty$$

On a bien
$$\left\| \int_{[a; b]} f \right\| \leq \int_{[a; b]} \|f\| \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

Enfin, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$u\left(\int_{[a; b]} f\right) = u\left(\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{\in \mathbb{K}} c_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) u(c_i)$$

Or, il est clair que $u(f) \in \mathcal{E}([a; b], F)$ avec A pour subdivision adaptée et

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad u(f)(x) = u(c_i)$$

Par suite,
$$u\left(\int_{[a; b]} f\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) u(c_i) = \int_{[a; b]} u(f)$$
 □

7.2.2 Prolongement aux fonctions continues par morceaux

On souhaite maintenant étendre la définition de l'intégrale, des fonctions en escalier aux fonctions continues par morceaux. L'ingrédient fondamental est le théorème d'approximation :

Théorème 7.2.7

L'ensemble $\mathcal{E}([a; b], E)$ est dense dans $\mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Preuve : On commence par montrer que si $a < b$, les fonctions en escalier sur $[a; b]$ sont denses dans $\mathcal{C}([a; b], E)$ pour $\| \cdot \|_\infty$.

Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], E)$. Comme $[a; b]$ est compact et f est continue, elle est uniformément continue : si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a; b] \quad |x - y| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

On prend un entier N tel que $\frac{b-a}{N} \leq \eta$; par exemple, $N = \lceil \frac{b-a}{\eta} \rceil + 1$ et on pose

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad a_k = a + k \frac{b-a}{N}$$

Alors $\{a_k \mid k \in \llbracket 0; N \rrbracket\}$ est une subdivision de $[a; b]$. On définit une fonction en escalier g sur $[a; b]$ de la manière suivante : si $k \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket$, on pose

$$\forall x \in [a_k; a_{k+1}[\quad g(x) = f(a_k)$$

et

$$g(a_N) = g(b) = f(b)$$

Soit $x \in [a; b]$. Si $x = b$, alors $g(b) = f(b)$ donc $\|g(b) - f(b)\| = 0$. Si $x \neq b$, il existe un unique $k \in \llbracket 0; N - 1 \rrbracket$ tel que $x \in [a_k; a_{k+1}[$. De sorte que $g(x) = f(a_k)$. Mais

$$|x - a_k| \leq a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{N} \leq \eta$$

donc

$$\|g(x) - f(x)\| = \|f(a_k) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

De cette manière, on a prouvé que

$$\forall x \in [a; b] \quad \|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$$

ce qui équivaut à dire

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall f \in \mathcal{C}([a; b], E) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in \mathcal{E}([a; b], E) \quad \|f - g\| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $\mathcal{E}([a; b], E)$ est dense dans $\mathcal{C}([a; b], E)$.

Passons maintenant aux fonctions continues par morceaux. Soient $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$ et $A = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ une subdivision adaptée à f . Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$; comme f est continue sur $]a_k; a_{k+1}[$, prolongeable par continuité à $[a_k; a_{k+1}[$, il existe une fonction en escalier $f_k \in \mathcal{E}([a_k; a_{k+1}], E)$ telle que

$$\forall x \in]a_k; a_{k+1}[\quad \|f(x) - f_k(x)\| \leq \varepsilon$$

On définit alors une fonction en escalier g sur $[a; b]$ en recollant les morceaux. Soit $x \in [a; b]$;

- Si $x \in A$, on a pose $g(x) = f(x)$. De cette manière, $\|f(x) - g(x)\| = 0 \leq \varepsilon$.
- Si $x \notin A$, il existe un unique $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ tel que $x \in]a_k; a_{k+1}[$. On pose alors $g(x) = f_k(x)$, ce qui assure $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$.

La fonction g juste construite satisfait alors $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. □

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$, il existe donc des suites de fonctions en escaliers qui convergent vers f pour $\| \cdot \|_\infty$. Naturellement, on se demande si la suite des intégrales converge; car si c'est le cas, cette limite serait un bon candidat pour être l'intégrale de f .

Lemme 7.2.8 (Lemme fondamental)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant vers f pour $\| \cdot \|_\infty$,

la suite $\left(\int_{[a; b]} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie.

Preuve : Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge vers f pour $\| \cdot \|_\infty$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \|f_{n+p} - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'après l'inégalité de la moyenne et la linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier,

$$\forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \int_{[a; b]} f_{n+p} - \int_{[a; b]} f_n \right\| = \left\| \int_{[a; b]} (f_{n+p} - f_n) \right\| \leq \varepsilon$$

La suite $\left(\int_{[a; b]} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans E . Mais E est complet donc cette suite converge et on note sa limite L .

Maintenant, donnons-nous une autre suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a; b]$, convergeant vers f pour $\| \cdot \|_\infty$. La suite des intégrales des $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc dans E vers un vecteur L' . De plus, la suite $(f_n - g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $\| \cdot \|_\infty$. On a, toujours d'après la linéarité de l'intégrale et l'inégalité de la moyenne pour les fonctions en escalier,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \int_{[a; b]} f_n - \int_{[a; b]} g_n \right\| = \left\| \int_{[a; b]} (f_n - g_n) \right\| \leq (b-a) \|f_n - g_n\|_\infty$$

Or,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{[a; b]} f_n - \int_{[a; b]} g_n \right) = L - L'$$

et
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\|_\infty = 0$$

En passant à la limite, on en déduit que $\|L - L'\| = 0$, donc $L = L'$. □

Définition 7.2.9 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a; b]$ convergeant vers f pour $\| \cdot \|_\infty$. On pose

$$\int_{[a; b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} f_n$$

7.2.3 Calcul intégral

Cette définition est bien posée d'après le **lemme 2.12**. Mais elle peut paraître bien abstraite, et peu utile pour le calcul explicite d'une intégrale. L'objectif est donc maintenant d'exploiter la définition pour en déduire une manière efficace de calcul d'une intégrale.

Proposition 7.2.10 (Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions continues par morceaux)

- **Relation de Chasles :** Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$. Pour tout $c \in]a; b[$, on a

$$\int_{[a; b]} f = \int_{[a; c]} f + \int_{[c; b]} f$$

- **Linéarité :** L'application $\mathcal{C}_{pm}([a; b], E) \rightarrow E$ est linéaire.

$$f \mapsto \int_{[a; b]} f$$

- **Inégalité de la moyenne :** $\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E) \quad \left| \int_{[a; b]} f \right| \leq \int_{[a; b]} \|f\| \leq (b-a) \|f\|_\infty$

- Soient F un espace vectoriel normé complet et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors

$$\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E) \quad u\left(\int_{[a; b]} f\right) = \int_{[a; b]} u(f)$$

- Changer la valeur en un nombre finie de points d'une fonction continue par morceaux ne change pas la valeur de son intégrale : si f et g sont continues par morceaux sur $[a; b]$, si $A \subset [a; b]$ est fini et si f et g sont égales sur $[a; b] \setminus A$, alors $\int_{[a; b]} f = \int_{[a; b]} g$.

Preuve : On procède dans l'ordre :

- Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$ et $c \in]a; b[$. On se donne une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a; b]$. Par définition,

$$\int_{[a; b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} f_n$$

Mais $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi uniformément sur $[a; c]$ et $[c; b]$ vers f . Donc

$$\int_{[a; c]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; c]} f_n \quad \int_{[c; b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[c; b]} f_n$$

Or, d'après le **théorème 2.9** et parce que les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont en escalier,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{[a; b]} f_n = \int_{[a; c]} f_n + \int_{[c; b]} f_n$$

En passant à la limite, il s'ensuit que

$$\int_{[a; b]} f = \int_{[a; c]} f + \int_{[c; b]} f$$

- Même principe : on prend f et g continues par morceaux sur $[a; b]$, qu'on approche uniformément par des suites de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a; b]$. Soient λ et μ deux scalaires. D'après le **théorème 2.9**,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{[a; b]} (\lambda f_n + \mu g_n) = \lambda \int_{[a; b]} f_n + \mu \int_{[a; b]} g_n$$

Or, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathcal{E}([a; b], E)$ et converge uniformément vers la fonction $\lambda f + \mu g$. Par définition de l'intégrale, il suffit de passer à la limite sur n pour obtenir

$$\int_{[a; b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a; b]} f + \mu \int_{[a; b]} g$$

- Soit f continue par morceaux sur $[a; b]$; on l'approche uniformément par une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b] \quad \left| \|f(x)\| - \|f_n(x)\| \right| \leq \|f(x) - f_n(x)\| \leq \|f - f_n\|_\infty$$

Il s'ensuit que $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier à valeurs réelles qui converge uniformément vers $\|f\|$, qui est évidemment continue par morceaux. Comme \mathbb{R} est complet,

$$\int_{[a; b]} \|f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} \|f_n\|$$

Mais d'après le **théorème 2.9**, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_{[a; b]} f_n \right| \leq \int_{[a; b]} \|f_n\| \leq (b-a) \|f_n\|_\infty$$

En passant à la limite, on obtient

$$\left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} \|f\| \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

- Soient F un espace vectoriel normé complet et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On se donne f continue par morceaux sur $[a; b]$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$. D'après le **théorème 2.9**,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u\left(\int_{[a;b]} f_n\right) = \int_{[a;b]} u(f_n)$$

Comme u est continue et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a;b]} f_n = \int_{[a;b]} f$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u\left(\int_{[a;b]} f_n\right) = u\left(\int_{[a;b]} f\right)$$

D'autre part, il est facile de vérifier que $(u(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier, qui converge uniformément vers $u(f)$ qui est continue par morceaux sur $[a; b]$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a;b]} u(f_n) = \int_{[a;b]} u(f)$$

Ceci fournit bien la relation désirée.

- C'est trivial : $f - g$ est nulle sur $[a; b] \setminus A$. Donc si on pose $A' = A \cup \{a; b\}$, on voit que $f - g$ est en escalier et A' est une subdivision adaptée, pour laquelle $f - g$ est nulle sur chaque sous-intervalle qu'elle définit. L'intégrale de $f - g$ est donc nulle, et la linéarité permet de conclure. \square

On s'attend, évidemment, au résultat habituel qui relie intégration et dérivation. Rappelons la

Définition 7.2.11 (Primitive d'une fonction)

Soient f et F deux fonctions définies sur une partie $A \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur A si, et seulement si, F est dérivable sur A et $F' = f$ sur A .

Théorème 7.2.12 (Égalité à constante près des primitives)

Soient I un intervalle qui contient au moins deux points et F, G , deux applications de I dans E , dérivables, telles que

$$\forall x \in I \quad F'(x) = G'(x)$$

Alors il existe $c \in E$ tel que

$$\forall x \in I \quad F(x) = G(x) + c$$

Preuve : Trivial, compte-tenu du **corollaire 1.10**. \square

Définition 7.2.13

Soient x et y deux réels et f une application à valeurs dans E , continue par morceaux sur un intervalle qui contient x et y . On pose

$$\int_x^y f(t) dt = \begin{cases} \int_{[x; y]} f & \text{si } x < y \\ -\int_{[y; x]} f & \text{si } y < x \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que si x, y et z sont trois réels et f est continue par morceaux sur un segment qui contient x, y et z , alors

$$\int_x^z f(t) dt = \int_x^y f(t) dt + \int_y^z f(t) dt$$

Il y a plusieurs cas à considérer et nous ne les ferons pas tous. Le cas où $x < y < z$ est traité dans la relation de Chasles (**proposition 2.13**). Si l'on suppose par exemple $y < x < z$, la relation de Chasles fournit

$$\int_{[y; z]} f = \int_{[y; x]} f + \int_{[x; z]} f$$

donc avec notre nouvelle notation,

$$\int_y^z f(t) dt = -\int_x^y f(t) dt + \int_x^z f(t) dt$$

d'où

$$\int_x^z f(t) dt = \int_x^y f(t) dt + \int_y^z f(t) dt$$

Dans les autres cas, tout marche tout aussi bien, car le monde, malgré tous ses problèmes, est bien fait. Il est également aisé de voir que

$$\int_x^y f(t) dt = -\int_y^x f(t) dt$$

L'inégalité de la moyenne devient, quant-à elle :

$$\left\| \int_x^y f(t) dt \right\| \leq \left| \int_x^y \|f(t)\| dt \right| \leq \begin{cases} (y-x) \sup_{t \in [x; y]} \|f(t)\| \\ (x-y) \sup_{t \in [y; x]} \|f(t)\| \end{cases}$$

Théorème 7.2.14 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$ et $x_0 \in [a; b]$. Posons

$$\forall x \in [a; b] \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Soit $\alpha \in]a; b[$. Alors F est dérivable à gauche et à droite en α et

$$F'_d(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \quad F'_g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$$

En particulier, F est continue sur $[a; b]$.

Preuve : Prouvons le théorème pour la dérivabilité à droite, par exemple : la dérivabilité à gauche se traite de la même manière.

Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue par morceaux sur $[a; b]$ donc elle a une limite à droite en α , qu'on note $f(\alpha^+)$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a; b] \quad 0 < x - \alpha < \eta \implies \|f(x) - f(\alpha^+)\| \leq \varepsilon$$

On peut, si nécessaire, prendre η plus petit pour être sur que $\alpha + \eta < b$, ce qui assure que

$$\forall h \in]0; \eta[\quad \|f(\alpha + h) - f(\alpha^+)\| \leq \varepsilon$$

On peut aussi supposer que $f(\alpha) = f(\alpha^+)$ car modifier f en un nombre fini de points ne change pas la fonction F .

Soit $h \in [0; \eta]$. On a

$$F(\alpha + h) - F(\alpha) = \int_{x_0}^{\alpha+h} f(t) dt - \int_{x_0}^{\alpha} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(t) dt = \int_{[\alpha; \alpha+h]} f$$

On peut aussi écrire que

$$f(\alpha^+) = \frac{1}{h} \int_{[\alpha; \alpha+h]} f(\alpha^+)$$

Par suite,
$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} - f(\alpha^+) = \frac{1}{h} \int_{[\alpha; \alpha+h]} (f - f(\alpha^+))$$

Or,
$$\sup_{x \in [\alpha; \alpha+h]} \|f(x)\| \leq \varepsilon$$

donc
$$\left\| \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} - f(\alpha^+) \right\| \leq \varepsilon$$

d'après l'inégalité de la moyenne. Cette inégalité est vraie pour tout $h \in [0; \eta]$, ce qui prouve bien que F est dérivable en α à droite et que $F'_d(\alpha) = f(\alpha^+)$. □

Dans l'énoncé du théorème, on a pris $\alpha \in]a; b[$ donc on pourrait croire que les points a et b sont oubliés. Ce n'est pas le cas : il suffit de prolonger f à $[a - 1; b + 1]$, en la posant nulle sur $[a - 1; a[$ et $]b; b - 1]$. On obtient alors la continuité et dérivabilité à gauche/droite en b/a pour la fonction prolongée, ce qui donne la dérivabilité en a et b pour la fonction f .

Corollaire 7.2.15

Soit I un intervalle qui contient au moins deux points. Soient $x_0 \in I$, $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et posons

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

F est une primitive de f sur I . De plus, si G est une primitive quelconque de f sur I , on a

$$\forall x, y \in I \quad \int_x^y f(t) dt = G(y) - G(x) = F(y) - F(x)$$

Preuve : Soient $a < b$ dans I . On a

$$\forall x \in [a; b] \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable en tout point de $\alpha \in]a; b[$ d'après le **théorème 2.17**, et sa dérivée en α vaut $f(\alpha)$, parce que f est continue en α . Par suite, F est dérivable en α et $F'(\alpha) = f(\alpha)$.

Comme a et b étaient quelconques, on voit que F est dérivable sur I et que

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Donc F est bien une primitive de f . De plus, à l'aide de la relation de Chasles,

$$\forall x, y \in I \quad F(y) - F(x) = \int_{x_0}^y f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt$$

Par suite, si G est une autre primitive de f sur I , on sait qu'il existe $c \in E$ tel que $G = F + c$ donc

$$G(y) - G(x) = (F(y) + c) - (F(x) + c) = F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt \quad \square$$

Ainsi, comme prévu, l'intégrale d'une fonction continue se calcule facilement si l'on connaît une primitive de cette fonction. Pour une fonction continue par morceaux, c'est à peine plus difficile : on subdivise l'intervalle d'intégration en sous-intervalles sur lesquels la fonction est continue et on cherche une primitive sur chacun de ces sous-intervalles, puis on recolle les morceaux.

Corollaire 7.2.16 (Intégration d'une dérivée)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], E)$. On a

$$\int_{[a; b]} f' = f(b) - f(a)$$

Corollaire 7.2.17 (Théorème d'intégration par parties)

Soient $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a; b] \rightarrow E$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$. Alors

$$\int_{[a; b]} f' g = [fg]_a^b - \int_{[a; b]} f g'$$

Preuve : D'après le **corollaire 2.19**, et parce que fg est de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$[fg]_a^b = \int_{[a; b]} (fg)' = \int_{[a; b]} (f'g + fg')$$

Les fonctions $f'g$ et fg' sont continues par morceaux donc on peut utiliser la linéarité de l'intégrale et conclure. □

Corollaire 7.2.18 (Théorème du changement de variable)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$; soit I un intervalle contenant $\varphi([a; b])$ et $f \in \mathcal{C}(I, E)$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Preuve : Comme f est continue sur I , elle admet des primitives sur cet intervalle. On note F l'une d'entre elles, de sorte que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

d'après le théorème fondamental. D'autre part, $F \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$, de dérivée $(f \circ \varphi) \varphi'$ donc, toujours à l'aide du théorème fondamental,

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \quad \square$$

Corollaire 7.2.19 (Changement de variable généralisé)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$, strictement monotone. Soient I un intervalle contenant $\varphi([a; b])$ et f continue par morceaux sur I . Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Preuve : Supposons par exemple que φ est strictement croissante sur $[a; b]$. Comme f est continue par morceaux sur cet intervalle, il existe une subdivision $A = \{u_0 = \varphi(a) < \dots < u_n = \varphi(b)\}$ de $[\varphi(a); \varphi(b)]$ telle que pour chaque $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, f est continue sur $]u_k; u_{k+1}[$, prolongeable par continuité à $[u_k; u_{k+1}]$.

Mais φ est bijective strictement croissante de $[a; b]$ sur $[\varphi(a); \varphi(b)]$, d'après le théorème de la bijection. Donc pour chaque $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, il existe un unique $a_k \in [a; b]$ tel que $\varphi(a_k) = u_k$. Si nécessaire, on change la valeur de f en u_k et u_{k+1} pour que la nouvelle fonction soit continue sur $[u_k; u_{k+1}]$; ceci ne change pas la valeur de $\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t) dt$ et le théorème de changement de variable assure que

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t) dt = \int_{\varphi(a_k)}^{\varphi(a_{k+1})} f(t) dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Il ne reste qu'à utiliser la relation de Chasles pour avoir

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt &= \int_{u_0}^{u_n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{a_0}^{a_n} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

Par bijectivité de φ , on a $a_0 = a$ et $a_n = b$ car $\varphi(a_0) = u_0 = \varphi(a)$ et $\varphi(a_n) = u_n = b$; ceci achève la démonstration. □

Corollaire 7.2.20 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^k(I, E) \cap \mathcal{C}_{pm}^{k+1}(I, E)$. Soit $a \in I$. On a

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{1}{k!} \int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt$$

Preuve : Intégrations par parties successives (récurrence), en faisant bien attention à passer par une subdivision adaptée à f . □

7.2.4 Intégrales à paramètres (première étude)

Dans ce dernier paragraphe, on s'interroge sur des problèmes fréquemment rencontrés en physique : peut-on « passer à la limite ou dériver sous une intégrale » ? peut-on échanger deux intégrales ?

Plus précisément, supposons qu'on a une fonction $f : [a; b] \times A \rightarrow E$, où A est une partie de \mathbb{R} , telle que pour chaque $u \in A$, la fonction d'une variable $t \mapsto f(t, u)$ est continue par morceaux, par exemple. Ceci nous autorise à calculer $\int_a^b f(t, u) dt$ qui est un vecteur de E . Lorsque u change, la valeur de cette intégrale change : c'est ce qu'on appelle une intégrale à paramètre. Il est alors naturel de s'interroger sur les propriétés de cette fonction de u .

Il existe de nombreux théorèmes, plus ou moins puissants, pour étudier ce type de problème. Nous pouvons d'ores et déjà en énoncer des versions assez simples ; d'autres versions plus fortes viendront plus tard, dans le chapitre sur les intégrales généralisées.

Dans tout ce qui suit, $a < b$ sont des nombres réels et I est un intervalle de \mathbb{R} qui contient au moins deux points.

Théorème 7.2.21 (Théorème faible de continuité sous l'intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}([a; b] \times I, \mathbb{K})$. Alors

$$\forall \alpha \in I \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b f(t, \alpha) dt$$

En d'autres termes, la fonction $x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$ est continue sur I .

Preuve : On commence par fixer des réels $c < d$ tels que $\alpha \in [c; d] \subset I$. C'est possible parce que

- Si α est intérieur à I , il existe $m > 0$ tel que $[\alpha - m; \alpha + m] \subset I$. Il suffit alors de prendre $c = \alpha - m$ et $d = \alpha + m$.
- Si $\alpha = \text{Min} I$, il suffit de prendre $c = \alpha$ et $d < \text{Sup} I$.
- Si $\alpha = \text{Max} I$, on prend $c > \text{Inf} I$ et $d = \alpha$.

On pose aussi

$$\forall x \in [a; b] \quad F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

f est continue sur $[a; b] \times [c; d]$, qui est fermé et borné dans \mathbb{R}^2 , donc compact. D'après le **théorème de Heine-Borel**, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (t, x), (t', x') \in [a; b] \times [c; d] \quad (|t - t'| \leq \eta \text{ et } |x - x'| \leq \eta) \implies |f(t, x) - f(t', x')| \leq \varepsilon$$

On fixe alors $x \in [c; d]$, tel que $|x - \alpha| \leq \eta$. On a alors

$$\forall t \in [a; b] \quad |f(t, x) - f(t, \alpha)| \leq \varepsilon$$

Comme $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, \alpha)$ sont continues, la linéarité de l'intégrale et l'inégalité de la moyenne assurent que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\alpha)| &= \left| \int_a^b (f(t, x) - f(t, \alpha)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, \alpha)| dt \\ &\leq (b - a) \sup_{t \in [a; b]} |f(t, x) - f(t, \alpha)| \leq (b - a)\varepsilon \end{aligned}$$

En résumé, $\forall x \in [c; d] \quad (|x - \alpha| \leq \eta \implies |F(x) - F(\alpha)| \leq (b - a)\varepsilon)$

Donc $\lim_{x \rightarrow \alpha} F(x)$ existe et vaut $F(\alpha)$. □

Théorème 7.2.22 (Théorème faible de dérivation sous l'intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}([a; b] \times I, \mathbb{K})$. On suppose que pour chaque $t \in [a; b]$ et $x \in [a; b]$, la fonction $u \mapsto f(t, u)$ est dérivable en x et on note $\partial_2 f(t, x)$ sa dérivée en x . On suppose aussi que l'application $(t, x) \mapsto \partial_2 f(t, x)$ est continue sur $[a; b] \times I$. Enfin, on pose

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall x \in I \quad F'(x) = \int_a^b \partial_2 f(t, x) dt$$

Preuve : Fixons $x_0 \in I$; comme dans la démonstration précédente, on choisit des réels $c < d$ tels que $x_0 \in [c; d] \subset I$. La fonction $(t, x) \mapsto \partial_2 f(t, x)$ est continue sur $[a; b] \times [c; d]$, qui est compact : si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (t, x), (t', x') \in [a; b] \times [c; d] \quad (|t - t'| \leq \eta \text{ et } |x - x'| \leq \eta) \implies |\partial_2 f(t, x) - \partial_2 f(t', x')| \leq \varepsilon$$

En particulier, $\forall t \in [a; b] \quad \forall x \in [c; d] \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \quad |\partial_2 f(t, x) - \partial_2 f(t, x_0)| \leq \varepsilon$

ou encore $\forall t \in [a; b] \quad \sup_{x \in [c; d] \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta]} |\partial_2 f(t, x) - \partial_2 f(t, x_0)| \leq \varepsilon$

On fixe momentanément $t \in [a; b]$. La fonction $x \mapsto (f(t, x) - f(t, x_0) - \partial_2 f(t, x_0)(x - x_0))$ est dérivable sur $[c; d] \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta]$, de dérivée $x \mapsto \partial_2 f(t, x) - \partial_2 f(t, x_0)$, bornée par ε sur cet intervalle. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall t \in [a; b] \quad \forall x \in [c; d] \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \quad |f(t, x) - f(t, x_0) - \partial_2 f(t, x_0)(x - x_0)| \leq |x - x_0| \varepsilon$$

Fixons $x \in [c; d]$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$. On peut alors diviser par $|x - x_0|$ pour obtenir

$$\forall t \in [a; b] \quad \left| \frac{f(t, x) - f(t, x_0)}{x - x_0} - \partial_2 f(t, x_0) \right| \leq \varepsilon$$

En utilisant la continuité de $t \mapsto f(t, x)$, $t \mapsto f(t, x_0)$ et $t \mapsto \partial_2 f(t, x_0)$, la linéarité de l'intégrale et l'inégalité de la moyenne, on obtient

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \partial_2 f(t, x_0) dt \right| \leq (b - a) \varepsilon$$

Cette estimation est valable pour tout $x \in [c; d]$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$. Ceci prouve bien que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et vaut } \int_a^b \partial_2 f(t, x_0) dt.$$

Comme x_0 était quelconque dans I , on a montré que F est dérivable sur I et que

$$\forall x \in I \quad F'(x) = \int_a^b \partial_2 f(t, x) dx$$

Le **théorème de continuité sous l'intégrale** permet alors de conclure que F' est continue sur I , ou encore que F est de classe \mathcal{C}^1 . □

Corollaire 7.2.23 (Théorème de Fubini faible)

Soient $f \in \mathcal{C}([a; b] \times I, \mathbb{K})$ et $c < d$ des réels tels que $[c; d] \subset I$. Alors les fonctions

$$x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt \quad \text{et} \quad t \mapsto \int_c^d f(t, x) dx$$

sont continues sur $[c; d]$ et $[a; b]$ respectivement. De plus,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx$$

Preuve : Posons $\forall (t, x) \in [a; b] \times [c; d] \quad \lambda(t, x) = \int_c^x f(t, u) du$

et montrons que λ satisfait aux hypothèses du théorème faible de dérivation sous l'intégrale.

Comme f est continue sur le compact $[a; b] \times [c; d]$, elle est uniformément continue donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $\eta \in]0; \varepsilon]$ tel que

$$\forall (t, x), (t', x') \in [a; b] \times [c; d] \quad (|t - t'| \leq \eta \text{ et } |x - x'| \leq \eta) \implies |f(t, x) - f(t', x')| \leq \varepsilon$$

f est aussi bornée sur ce compact et on note $M = \sup_{(t,x) \in [a; b] \times [c; d]} |f(t, x)|$.

On se donne (t, x) et (t', x') dans $[a; b] \times [c; d]$, tels que $|t - t'| \leq \eta$ et $|x - x'| \leq \eta$. Alors

$$\lambda(t', x') = \int_c^{x'} f(t', u) du = \int_c^x f(t', u) du + \int_x^{x'} f(t', u) du$$

d'où
$$\lambda(t', x') - \lambda(t, x) = \int_c^x (f(t', u) - f(t, u)) du + \int_x^{x'} f(t', u) du$$

On a choisi $|t - t'| \leq \eta$ donc

$$\forall u \in [c; x] \quad |f(t', u) - f(t, u)| \leq \varepsilon$$

L'inégalité de la moyenne fournit alors

$$\left| \int_c^x (f(t', u) - f(t, u)) du \right| \leq (x - c) \varepsilon \leq (d - c) \varepsilon$$

Pour majorer la deuxième intégrale, on utilise aussi l'inégalité de la moyenne et le fait que f est majorée par M sur $[a; b] \times [c; d]$:

$$\left| \int_x^{x'} f(t, u) du \right| \leq M |x - x'| \leq M \eta \leq M \varepsilon$$

Par suite,

$$|\lambda(t', x') - \lambda(t, x)| \leq (M + d - c) \varepsilon$$

Cette inégalité est valable pour tous (t, x) et (t', x') tels que $\|(t, x) - (t', x')\|_\infty \leq \eta$; on a bien montré que λ est (uniformément) continue sur $[a; b] \times [c; d]$.

Maintenant, à t fixé, la fonction $x \mapsto \lambda(t, x) = \int_c^x f(t, u) du$ est dérivable sur $[c; d]$ et sa dérivée est $x \mapsto f(t, x)$, parce que cette fonction est continue sur $[c; d]$ (**théorème fondamental**). Ceci assure que $\partial_2 \lambda = f$ est continue sur $[a; b] \times [c; d]$.

On peut donc appliquer le **théorème de dérivation sous l'intégrale** : si on pose

$$\forall x \in [c; d] \quad \Lambda(x) = \int_a^b \lambda(t, x) dt$$

on voit que Λ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[c; d]$ et

$$\forall x \in [c; d] \quad \Lambda'(x) = \int_a^b \partial_2 \lambda(t, x) dt = \int_a^b f(t, x) dt$$

Or, d'après le **théorème de continuité sous l'intégrale**, la fonction $\mu : x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$ est continue sur $[c; d]$; on peut donc poser

$$\forall x \in [c; d] \quad M(x) = \int_c^x \left(\int_a^b f(t, u) dt \right) du$$

et on sait (**théorème fondamental**) que M est une primitive de μ sur $[c; d]$. Or, Λ est aussi une primitive de μ sur $[c; d]$. Donc Λ et M sont égales à une constante près. Enfin,

$$\Lambda(c) = \int_a^b \left(\int_c^c f(t, u) \, du \right) dt = 0$$

et

$$M(c) = \int_c^c \left(\int_a^b f(t, u) \, dt \right) du = 0$$

Donc notre constante est nulle et $M = \Lambda$:

$$\forall x \in [c; d] \quad \int_a^b \left(\int_c^x f(t, u) \, du \right) dt = \int_c^x \left(\int_a^b f(t, u) \, dt \right) du$$

C'est largement suffisant pour conclure. □