Chapitre 4

Matrices

4.1 Les ensembles de matrices

4.1.1 Vocabulaire

Définition 4.1.1
Soient n et p deux entiers strictement positifs. On appelle *matrice de type* $n \times p$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, ou *matrice à* n *lignes et* p *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$, toute application de $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. Leur ensemble est noté $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi, si A est une matrice de type $n \times p$, il existe des éléments $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathbb{K}$, tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \qquad \mathrm{A}(i,j) = a_{i,j}$$

On convient donc de noter indifféremment

$$\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \qquad \text{ou bien} \qquad \mathrm{A} = \big(\mathrm{A}(i,j)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Il est également agréable de représenter la matrice A dans un tableau

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

Voici maintenant le vocabulaire propre aux matrices :

- Étant donné $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, le scalaire $a_{i,j}$ est appelé *coefficient de* A *situé à la* i*-ème ligne et* j*-ème colonne*.
- Le vecteur $(a_{i,1},\dots,a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$ est appelé i*-ème ligne de* A.
- Le vecteur $(a_{1,j},\dots,a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ est appelé j*-ème colonne de* A.
- Si $n = 1$, on dit que $\mathrm{A} = [a_{1,1} \;\cdots\; a_{1,p}]$ est une *matrice ligne*.
- Si $p = 1$, on dit que $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$ est une *matrice colonne*.
- Si $n = p$, on dit que A est une *matrice carrée*. L'ensemble des matrices carrées de type $n \times n$ est souvent abrégé en $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Supposons que A est carrée et que
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \qquad (i > j \implies a_{i,j} = 0)$$
c'est-à-dire que A est de la forme
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$
On dit alors que A est *triangulaire supérieure*.
- Supposons que A est carrée et que
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \qquad (i < j \implies a_{i,j} = 0)$$
c'est-à-dire que A est de la forme
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$
On dit alors que A est *triangulaire inférieure*.
- Supposons que A est carrée et que
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \qquad (i \neq j \implies a_{i,j} = 0)$$
c'est-à-dire que A est de la forme
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$
On dit alors que A est *diagonale*. Si de plus tous les coefficients diagonaux sont égaux, on dit que A est *scalaire*. Enfin, remarquons qu'une matrice est diagonale si et seulement si elle est à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.
- On appelle *matrice identité d'ordre n*, notée I_n, la matrice diagonale dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 1.
- On appelle *matrice nulle d'ordre $n \times p$*, notée $0_{n,p}$ ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la matrice dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

4.1.2 L'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Dans la mesure où les matrices dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des applications de $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, cet ensemble est muni de la structure d'espace vectoriel usuelle sur $\mathbb{K}^{[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]}$. Nous rappelons comment marchent l'addition matricielle et la multiplication par un scalaire, sous le jour des notations qui ont été définies dans le paragraphe précédent :

Définition 4.1.2
Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La *somme* de A et B, notée $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est la matrice définie par

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{bmatrix}a_{1,1}+b_{1,1}&\cdots&a_{1,p}+b_{1,p}\\\vdots&&\vdots\\a_{n,1}+b_{n,1}&\cdots&a_{n,p}+b_{n,p}\end{bmatrix}$$

En d'autres termes, on additionne deux matrices coefficient par coefficient. Évidemment, l'élément neutre pour l'addition est l'application nulle, c'est-à-dire la matrice nulle dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 4.1.3
Soient $\mathrm{A}=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Le produit de A par λ, noté λA, est la matrice définie par

$$\lambda\mathrm{A}=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{bmatrix}\lambda a_{1,1}&\cdots&\lambda a_{1,p}\\\vdots&&\vdots\\\lambda a_{n,1}&\cdots&\lambda a_{n,p}\end{bmatrix}$$

Ainsi, on multiplie une matrice par un scalaire en multipliant chaque coefficient de cette matrice par ce scalaire. Comme expliqué en introduction, ces opérations ne sont autres que les opérations usuelles sur $\mathbb{K}^{[\![1\,;\,n]\!]\times[\![1\,;\,p]\!]}$ qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donc

Théorème 4.1.4
$\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, muni des opérations d'addition interne et de la multiplication externe par les éléments de* $\mathbb{K}$*, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

On peut aussi en trouver une base et en calculer la dimension :

Théorème 4.1.5
Les matrices $(\mathrm{E}_{k,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant \ell\leqslant p}}$ *définies par*

$$\forall(k,l)\in[\![1\,;\,n]\!]\times[\![1\,;\,p]\!]\quad\forall(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]\times[\![1\,;\,p]\!]\qquad(\mathrm{E}_{k,\ell})_{i,j}=\begin{cases}1\ si\ (i,j)=(k,\ell)\\0\ si\ (i,j)\neq(k,\ell)\end{cases}$$

forment une base de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, appelée base canonique. Cet espace est de dimension* np*.*

Preuve : C'est clair une fois qu'on écrit chacune des matrices $(\mathrm{E}_{k,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant \ell\leqslant p}}$ sous forme de tableau. D'après la définition de $\mathrm{E}_{k,\ell}$, cette matrice a tous ses coefficients nuls, sauf un seul : celui se trouvant à la k-ème ligne et à la ℓ-ème colonne vaut 1. Sous forme de tableau,

$$\mathrm{E}_{k,\ell}=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots\\\vdots&&1&&\vdots\\\vdots&&&&\vdots\\0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\\\\leftarrow k\text{-ème ligne}\\\\\\\end{array}\\\uparrow&\\\ell\text{-ème colonne}&\end{array}$$

Compte-tenu du fait que l'addition matricielle et le produit d'une matrice par un scalaire se font coordonnée par coordonnée, on voit que si $\mathrm{A}=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, on a simplement

$$A = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j}$$

ce qui montre que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ engendre $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

La liberté est également simple à prouver : on se donne des scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j} = 0$$

Ceci implique que la matrice

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

est nulle. Donc tous ses coefficients sont nuls :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \qquad a_{i,j} = 0$$

et la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est libre. □

4.1.3 Le produit matriciel

On se donne trois entiers strictement positifs n, p et q. Le produit matriciel est une nouvelle opération, externe la plupart du temps, entre les espaces $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M_{p,q}(\mathbb{K})$. Elle est définie comme suit

Définition 4.1.6
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Le *produit de* A *et* B, noté AB, est la matrice de $M_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,p} \end{bmatrix}$$

Prenons le temps d'analyser la formule donnant le terme général du produit AB, de manière à la dédramatiser. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;q]\!]$ et intéressons-nous au coefficient $(AB)_{i,j}$, se situant à la i-ème ligne et j-ème colonne de AB. Par définition, il vaut :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Il fait donc intervenir les coefficients de la i-ème ligne de A et ceux de la j-ème colonne de B :

$$L_i(A) = [a_{i,1} \ \cdots \ a_{i,p}] \qquad \text{et} \qquad C_j(B) = \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{bmatrix}$$

On voit que $(AB)_{i,j}$ est obtenu simplement en multipliant entre eux :

- le premier coefficient de $L_i(A)$ et le premier coefficient de $C_j(B)$;
- le deuxième coefficient de $L_i(A)$ et le deuxième coefficient de $C_j(B)$;
- $\vdots$;
- le p-ème coefficient de $L_i(A)$ et le p-ème coefficient de $C_j(B)$.

Puis on additionne les nombres calculés, ce qui donne $(AB)_{i,j}$.

Exemple 4.1.7

1. Prenons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

alors
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans la mesure où tous les coefficients de la matrice nulle de $M_{p,q}(\mathbb{K})$ sont nuls,

$$\forall (i,j) \in [[1\,;n]] \times [[1\,;q]] \qquad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0} = 0$$

donc
$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$$

De même,
$$0_{q,n} \times A = 0_{q,p}$$

On voit donc que le produit d'une matrice nulle, que ce soit à gauche ou à droite, par n'importe quelle matrice de dimensions compatibles, est une matrice nulle.

3. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Prenons pour B la matrice I_p, identité d'ordre p. C'est la matrice carée $p \times p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale, qui sont égaux à 1. La produit $A \times B$ sera donc une matrice $n \times p$ et

$$\forall (i,j) \in [[1\,;n]] \times [[1\,;p]] \qquad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0 \text{ si } k \neq j} = a_{i,j} b_{j,j} = a_{i,j}$$

donc
$$A \times I_p = A$$

De même,
$$I_n \times A = A$$

Le produit de la matrice identité, que ce soit à droite ou à gauche, par une matrice A de dimensions compatibles, est égal à A.

La proposition suivante résume les propriétés élémentaires du produit matriciel :

Proposition 4.1.8

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall C \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \qquad (\lambda A + B)C = \lambda AC + BC$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall (B,C) \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \qquad A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$
3. $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \quad \forall C \in M_{q,r}(\mathbb{K}) \qquad A(BC) = (AB)C$

Preuve : Nous ne montrerons que les propriétés 1 et 3 ; la deuxième se démontre de la même manière que la première.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, A et B dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C dans $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;q]\!] \qquad \big((\lambda \mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (\lambda\mathrm{A}+\mathrm{B})_{i,k} c_{k,j}$$

Les opérations d'addition et de multiplication externe dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se font coordonnée par coordonnée donc

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;q]\!] \qquad \big((\lambda \mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}\big)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} (\lambda a_{i,k} + b_{i,k}) c_{k,j} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} b_{i,k}c_{k,j} \\ \big((\lambda \mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}\big)_{i,j} &= \lambda(\mathrm{AC})_{i,j} + (\mathrm{BC})_{i,j} = (\lambda\mathrm{AC}+\mathrm{BC})_{i,j}\end{aligned}$$

La propriété 2 se démontre de la même manière.

Passons à la troisième propriété. Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Soit (i,j) dans $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;r]\!]$; puisque la matrice A est de type $n \times p$ et la matrice BC est de type $p \times r$, on a

$$\big(\mathrm{A}(\mathrm{BC})\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} (\mathrm{BC})_{k,j}$$

D'après la définition du produit BC, on a

$$\forall k \in [\![1\,;r]\!] \qquad (\mathrm{BC})_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell} c_{\ell,j}$$

donc
$$\big(\mathrm{A}(\mathrm{BC})\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} \sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell} c_{\ell,j} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{q} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j}$$

On intervertit l'ordre des sommes :

$$\big(\mathrm{A}(\mathrm{BC})\big)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{q}\Big(\sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,\ell}\Big) c_{\ell,j}$$

et on reconnaît, dans la somme intérieure, le coefficient (i,ℓ) de la matrice AB. Donc

$$\big(\mathrm{A}(\mathrm{BC})\big)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q} (\mathrm{AB})_{i,\ell} c_{\ell,j} = \big((\mathrm{AB})\mathrm{C}\big)_{i,j}$$

donc on a bien
$$\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$$
□

> Remarquons qu'il n'y a aucune raison d'espérer que le produit matriciel commute. Prenons $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$; le produit AB est parfaitement défini, c'est une matrice de type $n \times q$. En revanche, le produit BA n'aura de sens que si $q = n$. Donc il n'est même pas défini en général.
>
> Mais, même si est dans le cas favorable où les dimensions de A et B sont suffisamment compatibles pour que les deux produits AB et BA aient un sens, il toujours faux en général que AB = BA. Par exemple, supposons que $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{AB} \in \mathrm{M}_{n}(\mathbb{K})$ tandis que $\mathrm{BA} \in \mathrm{M}_{p}(\mathbb{K})$: ces deux matrices ne sont pas de même type en général, sauf si $n = p$ et ont très peu de chances d'être égales. Par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc, le seul cas où on peut espérer que, peut être, A et B commutent est le cas où elles sont toutes deux carrées, de même taille. Mais observons l'exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1.4 La transposition

La transposition est la transformation qui échange lignes et colonnes d'une matrice :

Définition 4.1.9
On appelle *transposition* l'application

$$\begin{aligned} M_{n,p}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,p} \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{p,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, son image par la transposition est appelée sa *transposée* et on la note ${}^tA$.

Exemple 4.1.10
La transposée de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Théorème 4.1.11
Pour tous entiers non nuls n et p, la transposition est un isomorphisme de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Preuve : La linéarité est évidente. Et on observe que transposer deux fois une matrice ne change pas cette dernière, donc la transposition sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est inversible, d'inverse la transposition sur $M_{p,n}(\mathbb{K})$. ☐

Théorème 4.1.12

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Preuve : Les matrices ${}^tB$ et ${}^tA$ sont respectivement dans $M_{q,p}(\mathbb{K})$ et $M_{p,n}(\mathbb{K})$ donc le produit ${}^tB\,{}^tA$ est dans $M_{q,n}(\mathbb{K})$. Calculons chaque coefficient de cette matrice : si $(i,j) \in [[1\,;q]] \times [[1\,;n]]$, on a

$$({}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A})_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} ({}^t\mathrm{B})_{i,k}({}^t\mathrm{A})_{k,j}$$

Or, si $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, le coefficient d'ordre (i,k) de ${}^t\mathrm{B}$ est le coefficient d'ordre (k,i) de B, puisque la transposition échange les rôles des lignes et des colonnes ; de même pour $({}^t\mathrm{A})_{k,j}$, qui vaut $a_{j,k}$. Donc

$$({}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A})_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i}\,a_{j,k} = (\mathrm{AB})_{j,i}$$

et on a bien
$$({}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}) = {}^t(\mathrm{AB})$$
□

4.1.5 L'algèbre $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

Nous avons pu observer que le produit matriciel, défini plus haut, est en général une opération externe : en général, si A et B sont des matrices de dimensions compatibles pour que le produit AB existe, ce dernier n'est pas dans le même ensemble matriciel que A ou B.

En fait, le seul cas où les matrices A, B et AB vivent dans le même ensemble de matrices se produit lorsque ces matrices sont toutes trois carrées, de même dimension. Cela donne un statut particulier aux ensembles de matrices carrées, puisque ce sont les seuls pour lesquels le produit soit une opération interne.

Les propriétés du produit, obtenues dans le **paragraphe 1.3**, nous donnent :

Proposition 4.1.13
Soit n un entier non nul. L'ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, *muni de l'addition, du produit externe et du produit matriciel, est une algèbre associative. La matrice* I_n *est élément neutre pour la multiplication.*

Mais on observe également que la transposition sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une opération interne : si A est carrée $n \times n$, la matrice ${}^t\mathrm{A}$ est obtenue en échangeant lignes et colonnes de A. Elle est donc $n \times n$ également. On a mieux : puisqu'on a vu que transposer deux fois une matrice nous redonne celle-ci,

Théorème 4.1.14
La transposition est une symétrie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après l'étude des symétries dans les espaces vectoriels, on sait que

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\,({}^t - \mathrm{I}) \oplus \mathrm{Ker}\,({}^t + \mathrm{I})$$

On a d'ailleurs déterminé explicitement cette décomposition :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} + \frac{\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}}{2}$$

Définition 4.1.15
Les éléments de $\mathrm{Ker}\,({}^t - \mathrm{I})$ sont appelés *matrices symétriques* ; ce sont les matrices égales à leur transposée, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Les éléments de $\mathrm{Ker}({}^t+\mathrm{I})$ sont appelés *matrices antisymétriques* ; ce sont les matrices opposées à leur transposée, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 Matrices et applications linéaires

Ce paragraphe va nous aider à justifier la raison pour laquelle les opérations sur les matrices (et en particulier le produit) ont été définies de cette manière.

4.2.1 Correspondances entre applications linéaires et matrices

Définition 4.2.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$. Si $x \in \mathrm{E}$, on appelle *matrice colonne associée à x relativement à la base $\mathscr{B}$* l'unique $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formé des composantes de x dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.2.2
Soit E *de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$. L'application qui à un vecteur associe sa matrice colonne relativement à $\mathscr{B}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre* E *et* $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Preuve : Cette application est simplement

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto {}^t[x]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Il s'agit de la composée de deux isomorphismes d'espaces vectoriels (voir le cours sur les espaces de dimension finie). □

Important : À partir de maintenant, on convient de toujours utiliser des représentations en colonnes pour les composantes des vecteurs. En d'autres termes, on change de notation : jusqu'à présent, $[x]_{\mathscr{B}}$ était la liste des composantes de x dans la base $\mathscr{B}$, présentés sous forme de ligne. Désormais, $[x]_{\mathscr{B}}$ est cette liste en colonnes.

Par exemple, si $\mathrm{P} = 1 + 2\mathrm{X} + 4\mathrm{X}^2$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[\mathrm{X}]$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, on a

$$[\mathrm{P}]_{\mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Définition 4.2.3
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels des espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p. On se donne une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ de F. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle *matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, la matrice de type $p \times n$, dont la i-ème colonne est formée des composantes de $u(e_i)$ dans la base $\mathscr{C}$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

Exemple 4.2.4
On considère les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$. On note ensuite $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$; rappelons que

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} u : \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ x + y \\ -3x + 7y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, on doit calculer $u(e_1)$ et $u(e_2)$, exprimer leurs coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ et grouper ces coordonnées en colonne, dans cet ordre. On calcule donc

$$u(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 2f_1 + f_2 - 3f_3 \qquad u(e_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = -3f_1 + f_2 + 7f_3$$

Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Pour qu'il soit bien clair que la matrice d'une application linéaire n'est déterminée qu'au choix d'une base près, prenons le même u, mais des bases différentes dans $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$. Par exemple (et pour ne pas faire trop compliqué) :

$$\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2) \qquad \text{avec} \qquad e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad e'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et
$$\mathscr{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3) \qquad \text{avec} \qquad f'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors
$$u(e'_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2f'_1 - f'_2 + 4f'_3 \qquad u(e'_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 0 \times f'_1 - 5f'_2 - 10f'_3$$

Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Cet exemple, j'espère, illustre bien le fait que cela n'a aucun sens de parler de *la* matrice d'une application linéaire. Il est nécessaire de préciser une base pour l'espace de départ et une base pour l'espace d'arrivée.

Exemple 4.2.5
Un exemple un peu plus abstrait cette fois-ci. Prenons pour E et F le même espace $\mathbb{K}_2[X]$, des polynômes de degré inférieur à 2, munis chacun de la base canonique $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2)$. On définit l'endomorphisme suivant :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'$$

et on cherche $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}_c}(u)$. On doit calculer pour cela $u(1)$, $u(\mathrm{X})$ et $u(\mathrm{X}^2)$, et les décomposer dans la base canonique. On a

$$u(1) = 1 \circ (\mathrm{X}+1) - 1' = 1$$

$$u(\mathrm{X}) = \mathrm{X}+1-1 = \mathrm{X}$$

et $$u(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}+1)^2 - 2\mathrm{X} = \mathrm{X}^2+1$$

Par suite, $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}_c}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.2.6
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies n et p, rapportés à des bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$. Alors $y = u(x)$ si et seulement si $[y]_{\mathscr{C}} = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times [x]_{\mathscr{B}}$.*

Preuve : Posons $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$, $\mathscr{C} = (f_1,\ldots,f_p)$ et notons $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de u par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Par définition, la i-ème colonne de A donne les composantes de $u(e_i)$ dans $\mathscr{C}$. Autrement dit

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad u(e_i) = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} f_k$$

Notons $$\mathrm{X} = [x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Y} = [y]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

de sorte que $$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{k=1}^{p} y_k f_k$$

Par linéarité de u, on a

$$u(x) = u\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_i a_{k,i} f_k = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} x_i\Big) f_k$$

donc $$[u(x)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{p,i} x_i \end{bmatrix} = \mathrm{AX}$$

Puisqu'il y a une correspondance bijective entre un vecteur et la colonne de ses coordonnées dans une base donnée, on a

$$y = u(x) \iff \mathrm{Y} = [u(x)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{AX}$$

C'est exactement ce qui était annoncé. □

Proposition 4.2.7
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p, rapportés à des bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$*. L'application*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) &\longrightarrow \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})\\ u &\longmapsto Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve : Donnons des noms aux vecteurs des bases respectives de E et F :

$$\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$$

Soient u et v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons

$$\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, ceci signifie que

$$\forall i \in [[1\,;n]] \qquad u(e_i) = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} f_k \qquad \text{et} \qquad v(e_i) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} f_k$$

Par conséquent, $$(\lambda u + v)(e_i) = \lambda u(e_i) + v(e_i) = \sum_{k=1}^{p} (\lambda a_{k,i} + b_{k,i}) f_k$$

et $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + v) = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} + b_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{p,1} + b_{p,1} & \cdots & \lambda a_{p,n} + b_{p,n}\end{bmatrix} = \lambda \mathrm{A} + \mathrm{B}$$

L'application $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est donc bien linéaire.

Montrons maintenant qu'il sagit d'un isomorphisme. Cela pourrait être fait à la main, mais autant utiliser des résultats déjà établis. Il suffit de montrer que toute matrice dans $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ représente une unique application linéaire entre E et F, relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit donc $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Notons

$$\forall i \in [[1\,;n]] \qquad g_i = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} f_k \in \mathrm{F}$$

de sorte que g_i soit représenté dans la base $\mathscr{C}$ par la i-ème colonne de A.

Nous avons vu dans le cours sur les espaces vectoriels de dimension finie qu'une application linéaire sur un espace de dimension finie est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base. Il existe donc un et un seul $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ tel que

$$\forall i \in [[1\,;n]] \qquad u(e_i) = g_i$$

ce qui est équivalent à dire que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. □

Théorème 4.2.8
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies n et p, rapportés à des bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$*. Soient* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$*. Alors*

$$\mathrm{A} = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \iff \big(\forall x \in \mathrm{E} \qquad [u(x)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{A}[x]_{\mathscr{B}}\big)$$

Preuve : On sait déjà, d'après la **proposition 2.6** que si $A = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, alors

$$\forall x \in E \qquad [u(x)]_{\mathscr{C}} = A[x]_{\mathscr{B}}$$

Réciproquement, supposons cette assertion vraie. Donnons des noms aux vecteurs des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$$

Alors
$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad [u(e_i)]_{\mathscr{C}} = A[e_i]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{p,i} \end{bmatrix}$$

Donc pour chaque $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, la i-ème colonne de $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ coincide avec la i-ème colonne de A. Ces matrices sont donc égales. □

Théorème 4.2.9
Soient E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions respectives* n, p *et* r, *rapportés chacun à des bases* $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{D}$. *Soient* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $v \in \mathscr{L}(F,G)$. *Alors*

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

Preuve : Remarquons déjà que $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \in M_{r,p}(\mathbb{K})$: on est sûr que le produit $\text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ a un sens, ce qui est déjà un bon point.

Soit $x \in E$. D'après la **proposition 2.6**, on a

$$[u(x)]_{\mathscr{C}} = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \times [x]_{\mathscr{B}}$$

et
$$\big[v(u(x))\big]_{\mathscr{D}} = \text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times [u(x)]_{\mathscr{C}} = \text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}} \times (\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times [x]_{\mathscr{B}})$$

Or, le produit matriciel est « associatif » d'après la **proposition 1.8** donc

$$[v \circ u(x)]_{\mathscr{D}} = (\text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)) \times [x]_{\mathscr{B}}$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$ □

4.2.2 Matrices inversibles

Définition 4.2.10
Soient n et p deux entiers non nuls, soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Elle est dite

- *inversible à droite* si, et seulement si, il existe $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, telle que $AB = I_n$;
- *inversible à gauche* si, et seulement si, il existe $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_p$.

> Faisons dès maintenant une observation. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice inversible à droite et à gauche, on sait qu'il existe B et C dans $M_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que
>
> $$AB = I_n \qquad \text{et} \qquad CA = I_p$$
>
> Par suite,
> $$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_pB = B$$
>
> Donc un inverse à droite est aussi inverse à gauche de A et celui-ci est unique.

Proposition 4.2.11
Soient n et p deux entiers non nuls. Soit A *dans* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *; on note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à* A*. Alors :*

- A *est inversible à gauche si, et seulement si, u est injective. Dans ce cas, $p \leqslant n$.*
- A *est inversible à droite si, et seulement si, u est surjective. On a alors $n \leqslant p$.*
- A *est inversible à gauche et à droite si, et seulement si, u est bijective. Dans ce cas, $n = p$.*

Preuve : On démontre chaque point dans l'ordre. Dans toute la démonstration, on notera $\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}_p = (f_1, \ldots, f_p)$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. On rappelle que, par définition de u, on a

$$\forall x \in \mathbb{K}^p \qquad u(x) = \mathrm{A}x$$

et que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p, \mathscr{B}_n}(u) = \mathrm{A}$$

- Supposons d'abord que A est inversible à gauche. Il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_p$. Donc si $x \in \mathrm{Ker}\, u$, on a

  $$0 = u(x) = \mathrm{A}x$$

  donc
  $$0 = \mathrm{B}0 = \mathrm{BA}x = x$$

  ce qui montre que u est injective.
  Réciproquement, si u est injective, on sait que $(u(f_1), \ldots, u(f_p))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$. Ceci assure en particulier que $p \leqslant n$. Pour simplifier, on pose

  $$\forall i \in [\![1\,; p]\!] \qquad u(f_i) = y_i$$

  On peut compléter la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ en une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{K}^n$. On note v l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, telle que

  $$\forall i \in [\![1\,; n]\!] \qquad v(y_i) = \begin{cases} f_i \text{ si } i \leqslant p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  Alors
  $$\forall i \in [\![1\,; p]\!] \qquad v \circ u(f_i) = v(u(f_i)) = v(y_i) = f_i$$

  Mais $v \circ u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p)$ et coïncide avec l'identité sur la base $(f_1, \ldots, f_p)$. Donc $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$. D'après le **théorème 2.9**,

  $$\mathrm{I}_p = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n, \mathscr{B}_p}(v) \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p, \mathscr{B}_n}(u)}_{=\mathrm{A}}$$

  Ceci montre que A est inversible à gauche.
- Supposons maintenant que A est inversible à droite. On prend $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ et on montre que u est surjective. On prend $y \in \mathbb{K}^n$; on sait que

  $$y = \mathrm{I}_n y = (\mathrm{AB})y = \mathrm{A}(\mathrm{B}y) = u(\mathrm{B}y)$$

  donc u est surjective.
  Réciproquement, supposons u surjective. Chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_n$ est atteint par u : il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^p$ tels que

  $$\forall i \in [\![1\,; n]\!] \qquad u(x_i) = e_i$$

  On note v l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, telle que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad v(e_i) = x_i$$

et on pose $$\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}(v)$$

On a $$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad u \circ v(e_i) = u(v(e_i)) = u(x_i) = e_i$$

ce qui montre que $u \circ v = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. D'après le **théorème 2.9**, on a $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$. Donc A est inversible à droite.
Enfin, le théorème du rang montre que

$$\dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = p$$

Comme u est surjective, $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}^n$ donc on a bien $p \geqslant n$.

- C'est trivial.

Une conséquence immédiate de ce théorème et du **théorème du rang** est :

Corollaire 4.2.12
Soient n un entier strictement positif et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible ;*
2. *A est inversible à droite ;*
3. *A est inversible à gauche.*

Définition 4.2.13
Soit n un entier strictement positif. L'ensemble des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé *groupe linéaire d'ordre n* et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Comment trouver A^{-1} une fois qu'on a A ? Comme toujours, en utilisant le lien entre matrices et applications linéaires.

Si A a été obtenue comme matrice d'un isomorphisme $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ relativement à des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F, on peut chercher u^{-1} et ensuite écrire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1})$. Cette matrice est égale à A^{-1}.

Mais si A est simplement une matrice $n \times n$ donnée en tant que telle, on sait qu'elle peut être vue canoniquement comme un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ rapporté à sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour trouver A^{-1}, il « suffit » (c'est difficile et fastidieux) de trouver ses colonnes. Autrement dit, on doit déterminer $\mathrm{A}^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. Ce vecteur vérifie $\mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1}e_i) = e_i$: c'est l'unique vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui est solution de l'équation

$$\mathrm{AX} = e_i$$

qui s'écrit $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ \qquad\vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n &= 1 \\ \qquad\vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n &= 0 \end{cases}$$

Bref, trouver A^{-1}, c'est aussi facile que résoudre n systèmes de n équations à n inconnues. Youpi !

Théorème 4.2.14
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. A *est inversible si et seulement si* ${}^t\mathrm{A}$ *l'est. Dans ce cas,* $({}^t\mathrm{A})^{-1} = {}^t(\mathrm{A}^{-1})$.

Preuve : Supposons A inversible. Alors $AA^{-1} = I_n$ donc

$$^tI_n = I_n = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1})\,{}^tA$$

et on voit que ^tA est inversible à droite. Donc inversible tout court, d'après le **corollaire 2.12**. Et son inverse est la transposée de l'inverse de A.

Réciproquement, si ^tA est inversible, alors $A = {}^t({}^tA)$ l'est aussi d'après ce qui précède. Gagné.□

Théorème 4.2.15
Soient A *et* B *dans* $M_n(\mathbb{K})$. *Le produit* AB *est inversible si et seulement si* A *et* B *sont inversibles. Dans ce cas,* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve : Supposons d'abord que A et B sont inversibles. Alors

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{=I_n}B = B^{-1}B = I_n$$

et on voit que AB est inversible à gauche. Donc inversible tout court, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

Réciproquement, supposons que AB est inversible. Alors

$$I_n = (AB)^{-1}(AB) = \big((AB)^{-1}A\big)B$$

B est inversible à gauche et donc inversible tout court. De même,

$$I_n = (AB)(AB)^{-1} = A\big(B(AB)^{-1}\big)$$

A est inversible à droite, donc inversible. □

4.2.3 Changements de bases

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, étant donnés des espaces vectoriels E et F de dimensions finies n et p, $\mathscr{L}(E,F)$ et $M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont isomorphes. Mais il y au moins autant de manières de construire un tel isomorphisme qu'il y a de bases de E et F. Enfonçons le clou : l'isomorphisme qu'on a construit à la **proposition 2.7** dépend du choix d'une base pour E et d'une base pour F. L'**exemple 2.4** le montre bien.

Du coup se pose la question : disons qu'on ait

- deux bases $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ de E ;
- deux bases $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$ et $\mathscr{C}' = (f'_1,\dots,f'_p)$ de F ;
- une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$. Existe-t-il une relation entre A et A′ ? Évidemment, la réponse est positive.

Définition 4.2.16
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \big[\, [e'_1]_{\mathscr{B}} \quad \cdots \quad [e'_n]_{\mathscr{B}} \,\big]$$

Exemple 4.2.17
Reprenons les bases

- $\mathscr{B} = (e_1,e_2)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1,e'_2)$ de $\mathbb{K}^2$;
- $\mathscr{C} = (f_1,f_2,f_3)$ et $\mathscr{C}' = (f'_1,f'_2,f'_3)$ de $\mathbb{K}^3$

de l'**exemple 2.4**. On a

$$e'_1 = e_1 + e_2 \qquad e'_2 = -e_1 + e_2 \qquad e_1 = \frac{e'_1 - e'_2}{2} \qquad e_2 = \frac{e'_1 + e'_2}{2}$$

donc $$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De même, $$f'_1 = f_2 \qquad f'_2 = f_1 \qquad f'_3 = f_3$$

donc $$\mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.2.18
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E*. Les matrices de passage* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ *et* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ *sont inversibles et inverses l'une de l'autre.*

Preuve : La matrice de l'identité, relativement aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ est obtenue en plaçant en colonnes les coordonnées, dans la base $\mathscr{B}$, des vecteurs de $\mathscr{B}'$; autrement dit, il s'agit de $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$:

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{I})$$

De la même manière, $$\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{I})$$

En utilisant le **théorème 2.9**,

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{I})\,\mathrm{Mar}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{I}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{I}) = \mathrm{I}_n$$ □

Exemple 4.2.19
On peut vérifier ce fait avec les matrices de passage obtenues à l'**exemple 2.18** :

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2$$

De même avec les matrices de passages entre les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Proposition 4.2.20 (Loi de l'emmerdement maximum)
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E*. Les coordonnées relativement à chacune de ces bases vérifient la relation :*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [x]_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}[x]_{\mathscr{B}'}$$

Preuve : C'est un simple calcul. Donnons des noms aux vecteurs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$:

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \qquad \mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$$

ainsi qu'aux coefficients de la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$:

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Ceci signifie que $$\forall j \in [\![1\,;n]\!] \qquad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$$

Si x est un vecteur de E, qui se décompose relativement à $\mathscr{B}$ sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad [x]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

On déroule :
$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j \Big) e_i$$

donc
$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} p_{1,j} x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} p_{n,j} x'_j \end{bmatrix} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [x]_{\mathscr{B}'}$$
□

> Cette proposition porte ce nom parce que sa conclusion est le contraire de ce qu'on espère : en toute logique, compte-tenu de la dénomination, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ *devrait* nous donner les coordonnées relativement à $\mathscr{B}'$, en fonction des coordonnées relativement à $\mathscr{B}$. Mais en fait, pas du tout.
>
> Remarquons aussi qu'elle aurait pu nous permettre de démontrer que $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ sont inverses l'une de l'autre. En effet,
>
> $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [x]_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [x]_{\mathscr{B}'} \qquad \text{et} \qquad [x]_{\mathscr{B}'} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} [x]_{\mathscr{B}}$$
>
> d'où
> $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [x]_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} [x]_{\mathscr{B}}$$
>
> Le **théorème 2.8** implique que $\mathrm{I}_n = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Théorème 4.2.21
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies* n *et* p*. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E *; soient* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *deux bases de* F*. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*. Alors*

$$Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'\,-1} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

Preuve : Notons

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \qquad \mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(u) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$$

Si $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{X} = [x]_{\mathscr{B}} \qquad \mathrm{X}' = [x]_{\mathscr{B}'} \qquad \mathrm{Y} = [u(x)]_{\mathscr{C}} \qquad \mathrm{Y}' = [u(x)]_{\mathscr{C}'}$$

D'après la **proposition 2.6**,

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}'$$

D'après la **loi de l'emmerdement maximum**,

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{QY}'$$

Alors
$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{APX}'$$

donc
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [u(x)]_{\mathscr{C}'} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}[x]_{\mathscr{B}'}$$

Le **théorème 2.8** implique alors que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$, comme annoncé. □

Exemple 4.2.22
Vérifions la validité de cette formule dans le cadre de l'exemple que nous avons suivi jusqu'ici. Nous avions trouvé

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

et les matrices de passages étaient

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) \end{aligned}$$

4.3 Le rang

On rappelle qu'on a déjà parlé à deux reprises d'une notion appelée « rang » : le rang d'une application linéaire sur un espace de dimension finie et le rang d'une famille de vecteurs.

Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille finie de vecteurs, son rang est la dimension du sous-espace qu'elle engendre. Tandis que si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, avec E de dimension finie, alors $\mathrm{rg}\, f$ est la dimension de $\mathrm{Im}\, f$. C'est aussi le rang de l'image par f d'une base de E.

Nous définissons une troisième notion de rang, sur les matrices cette-fois.

4.3.1 Définitions et première propriétés

Définition 4.3.1
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le *rang* de A, noté rgA, est la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A.

Définition 4.3.2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$. Soient des vecteurs $x_1,\dots,x_p$ dans E. On appelle *matrice de la famille* $(x_1,\dots,x_p)$ *relativement à la base* $\mathscr{B}$ la matrice

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_p) = \big[\, [x_1]_{\mathscr{B}} \quad \cdots \quad [x_p]_{\mathscr{B}} \,\big]$$

Théorème 4.3.3
1. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*. Le rang d'une famille finie de vecteurs* $(x_1,\dots,x_p)$ *de* E *est égal au rang de sa matrice relativement à n'importe quelle base :*

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E \qquad rg(x_1,\dots,x_p) = rg\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_p)$$

2. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Le rang de* f *est égal au rang de toute matrice pouvant représenter* f.

Preuve : Soit E de dimension finie, soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Donnons-nous une base $\mathscr{B}$ de E. On sait que l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathbb{K}^n\\ x &\longmapsto [x]_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, sa restriction au sous-espace engendré par $(x_1,\dots,x_p)$ est injective ; et on a

$$\Phi(\mathrm{Vect}\,(x_1,\dots,x_p)) = \mathrm{Vect}\,([x_1]_{\mathscr{B}},\dots,[x_p]_{\mathscr{B}})$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Vect}\,(x_1,\dots,x_p)) = \dim(\mathrm{Vect}\,([x_1]_{\mathscr{B}},\dots,[x_p]_{\mathscr{B}}))$$

Or, le membre de gauche est le rang de $(x_1,\dots,x_p)$; tandis que celui de droite est le rang de la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_p)$. La première proposition est donc démontrée.

Maintenant, donnons-nous E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et p. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$ des bases quelconques de E et F. On sait déjà que

$$\mathrm{rg}\, u = \dim(\mathrm{Vect}\,(u(e_1),\dots,u(e_n))) = \mathrm{rg}\,(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

Et d'après la première partie du théorème,

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}_{\mathscr{C}}(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

Mais la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{C}}(u(e_1),\dots,u(e_n))$ n'est autre que la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Ce qui achève la démonstration. □

> Observons (c'est évident) qu'une matrice A carrée $n \times n$ est inversible si et seulement si elle est de rang n. En effet, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qu'elle représente canoniquement, on a $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} \mathrm{A} = n$. Donc u est surjective et A est inversible.

4.3.2 Rang et transposition

Lemme 4.3.4
Soient A *et* B *deux matrices de type* $n \times p$. *On suppose qu' il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, *tels que* $\mathrm{B} = \mathrm{PAQ}$. *Alors* A *et* B *ont le même rang.*

Preuve : Supposons que $\mathrm{B} = \mathrm{PAQ}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Notons u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de ces espaces est A. De sorte que $\mathrm{rg}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\, u$, d'après le **théorème 3.3**.

On note aussi

- $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$;
- $\mathscr{B}'$ la famille libre formée par les colonnes de Q ;
- $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$;
- $\mathscr{C}'$ la famille libre des colonnes de P^{-1}.

Compte-tenu de ces notations, Q est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$. D'après le **théorème 2.22**, $B = PAQ$ est la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$. Donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} B$: A et B ont même rang. □

Lemme 4.3.5
Soit A *dans* $M_{n,p}(\mathbb{K})$. *Elle est de rang* r *si et seulement si il existe* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ *telles que*

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

Preuve : Le **lemme 3.4** montre que si

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

avec P et Q inversibles, alors

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = r$$

Réciproquement, supposons que A est de rang r. Notons $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application canoniquement associée à A. On sait d'après le **théorème 3.3** que u est de rang r. Cela signifie que $\operatorname{Im} u$ est de dimension r et $\operatorname{Ker} u$ est de dimension $p - r$.

À l'aide du théorème de la base incomplète, on se donne

- une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$ telle que les $p - r$ derniers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u$;
- une base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dont les r premiers vecteurs sont définis par

$$\forall i \in [\![1 ; r]\!] \qquad f_i = u(e_i)$$

Alors
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

u est donc représenté, par rapport aux bases canoniques, par A ; et relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ par $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. D'après le **théorème 2.22**, il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$ □

Corollaire 4.3.6
Une matrice et sa transposée ont même rang.

Preuve : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, dont on note r le rang. D'après le **lemme 3.5**, il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

Donc
$${}^tA = {}^tQ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^tP$$

ce qui prouve que ${}^t\mathrm{A}$ est également de rang r, d'après le **lemme 3.5**. □

L'intérêt de ce résultat est clair : si on veut calculer le rang d'une matrice, on peut s'intéresser indifféremment au rang de ses lignes ou au rang de ses colonnes. Si la matrices a plus de colonnes que de lignes, ce sera peut-être plus simple d'étudier le rang de ses lignes.

4.3.3 Rang et opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur une famille de vecteurs ont déjà été brièvement abordées en TDs. Nous faisons une étude plus détaillée dans ce paragraphe ; au passage, nous obtiendrons un algorithme pour déterminer si une matrice est inversible et en calculer un inverse.

Définition 4.3.7
Soit A une matrice. On appelle *opération élémentaire sur les lignes de* A toute transformation du type suivant :
- échange des lignes i et j de A ; cette opération est appelé *permutation* et sera notée $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$.
- multiplication de la ligne i de A par un scalaire α non nul ; cette opération est appelée *dilatation* et sera notée $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\mathrm{L}_i$.
- ajout de la ligne j, dilatée par un scalaire α, à la ligne i ; cette opération est appelée *transvexion* et sera notée $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha\mathrm{L}_j$.

Les opérations correspondantes sur les colonnes sont appelées *opérations élémentaires sur les colonnes de* A et on les note avec des C à la place des L.

Lemme 4.3.8
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, soit* $(i, j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; n]\!]$*. La matrice* $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}$ *est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la* i*-ème, qui contient la* j*-ème ligne de* A.

Preuve : Il suffit de faire le calcul. □

Corollaire 4.3.9
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *Faire la permutation* $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ *revient à multiplier* A *à gauche par la matrice inversible* $\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{j,j} + \mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,i}$.
2. *Faire subir à* A *la dilatation* $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\mathrm{L}_i$ *revient à multiplier* A *à gauche par la matrice inversible* $\mathrm{I}_n + (\alpha - 1)\mathrm{E}_{i,i}$.
3. *Faire la transvexion* $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha\mathrm{L}_j$ *revient à multiplier* A *à gauche par la matrice inversible* $\mathrm{I}_n + \alpha\mathrm{E}_{i,j}$.

Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le rang d'une matrice.

Preuve : Procédons par ordre.

1. L'opération de permutation $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ peut être décomposée de la manière suivante :
   - On remplace les lignes i et j de A par des zéros. Cela revient à soustraire $\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{A} + \mathrm{E}_{j,j}\mathrm{A}$ à A.
   - On ajoute ensuite la j-ème ligne de A en i-ème position et la i-ème ligne en j-ème position. Cela revient à ajouter $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A} + \mathrm{E}_{j,i}\mathrm{A}$.

La matrice obtenue vaut donc

$$\mathrm{A}-\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{A}-\mathrm{E}_{j,j}\mathrm{A}+\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}+\mathrm{E}_{j,i}\mathrm{A}=(\mathrm{I}_n-\mathrm{E}_{i,i}-\mathrm{E}_{j,j}+\mathrm{E}_{i,j}+\mathrm{E}_{j,i})\mathrm{A}$$

$\mathrm{I}_n-\mathrm{E}_{i,i}-\mathrm{E}_{j,j}+\mathrm{E}_{i,j}+\mathrm{E}_{j,i}$ est de rang n donc inversible (il suffit d'écrire cette matrice pour le voir).

2. L'opération de dilatation $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\mathrm{L}_i$ peut être décomposée de la manière suivante :
   - On remplace la ligne i de A par des zéros. Cela revient à soustraire $\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{A}$ à A.
   - On ajoute ensuite la i-ème ligne, multipliée par α. Cela revient à ajouter $\alpha\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{A}$ à A.

   La matrice obtenue vaut donc

$$\mathrm{A}-\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{A}+\alpha\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{A}=(\mathrm{I}_n+(\alpha-1)\mathrm{E}_{i,i})\mathrm{A}$$

   $\mathrm{I}_n+(\alpha-1)\mathrm{E}_{i,i}$ est de rang n donc inversible.

3. L'opération de transvexion $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i+\alpha\mathrm{L}_j$ fournit la matrice

$$\mathrm{A}+\alpha\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}=(\mathrm{I}_n+\alpha\mathrm{E}_{i,j})\mathrm{A}$$

   Évidemment, $\mathrm{I}_n+\alpha\mathrm{E}_{i,j}$ est inversible.

On sait que multiplier une matrice par des matrices inversibles ne change pas son rang. Donc les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le rang d'une matrice. □

Corollaire 4.3.10
Les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas le rang d'une matrice.

Preuve : Les opérations élémentaires sur les colonnes de A sont des opérations élémentaires sur les lignes de ${}^t\mathrm{A}$. Elles ne changent donc pas le rang de ${}^t\mathrm{A}$; mais celui-ci est égal au rang de A donc c'est gagné. □

Donc le rang d'une matrice peut se calculer en procédant à des opérations élémentaires sur ses lignes ou ses colonnes. Le but est de simplifier la matrice suffisamment pour qu'elle ait beaucoup de zéros et que le rang se voie bien à l'œil nu. Au final, la constatation importante est que si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg}\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & ? & \cdots & ? \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right] = 1+\mathrm{rg}\,\mathrm{A}$$

4.3.4 La méthode du pivot

Dans ce dernier paragraphe, nous démontrons que la méthode du pivot marche. C'est à la fois un outil de calcul du rang, mais nous verrons qu'il nous fournit aussi l'inverse d'une matrice quand celle-ci est inversible.

Théorème 4.3.11
Soit A *une matrice inversible. À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de* A*, il est possible de transformer* A *en* I_n.

Preuve : Faisons cela par récurrence sur la taille n de la matrice A. Si A est inversible de type 1×1, elle ne contient qu'un élément α, nécessairement non nul ; donc en divisant l'unique ligne de A par α, on obtient la matrice I_1.

Soit $n > 0$ et supposons le résultat vrai pour les matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{K})$. Prenons une matrice $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Si sa première colonne était remplie de zéros, son rang serait inférieur à n ce qui contredit son inversibilité. Donc A admet au moins un coefficient non nul dans sa première colonne. À l'aide d'une opération sur les lignes, on peut l'amener en position $(1,1)$, diviser la ligne par ce nombre et se retrouver avec une matrice de la forme

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \hline a_{2,1} & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ a_{n+1,1} & & & \end{array}\right]$$

On peut ensuite faire $L_i \leftarrow L_1 - a_{i,1}L_1$ pour $i \in [\![2\,;\,n+1]\!]$ pour se retrouver avec

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Faire ces manipulations n'a pas changé le rang de la grosse matrice donc

$$1 + \operatorname{rg} B_2 = n + 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg} B_2 = n$$

Comme B_2 est de taille $n \times n$, de rang n, elle est inversible. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut manipuler ses lignes pour obtenir l'identité. Cela revient à manipuler de la même manière les lignes 2 à $n+1$ de A_2. Après cette opération, on a

$$A_3 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right]$$

Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{k=2}^{n+1} a_{1,k}L_k$ pour obtenir enfin la matrice I_{n+1}. Ce qui achève la démonstration. □

On est enfin capable de montrer rigoureusement pourquoi la « technique », décrite en cours pour calculer l'inverse d'une matrice inversible, marche. Voici schématiquement comment elle fonctionne : on a $A \in GL_n(\mathbb{K})$; on colle A à côté de I_n pour former une « matrice augmentée » de taille $n \times 2n$. Et on manipule les lignes de cette grosse matrice de manière à transformer A en I_n :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \xrightarrow[\text{opérations sur les lignes}]{} \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right]$$

Par quel « miracle » est-ce que B est automatiquement égale à A^{-1} ?

Rappelons-nous que les opérations sur les lignes d'une matrice sont équivalentes à la multiplication à gauche par une matrice inversible, d'après le **corollaire 3.9**. Donc faire toutes nos opérations sur les lignes de A, c'est multiplier A à gauche par une matrice inversible P qui code toutes ces opérations. Dans la mesure où, à la fin du processus, on obtient l'identité, cela signifie que $PA = I_n$, donc $P = A^{-1}$.

Ensuite, répercuter ces opérations sur I_n, c'est simplement multiplier I_n par P. Donc $B = PI_n = P = A^{-1}$.