Matrices

1 Calculs matriciels :

1. Calculer des produits matriciels, jusqu'à être sûr que vous avez compris comment ça marche.
2. On note $J \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont 1. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$; on note $\sigma(M)$ la somme de tous les coefficients de M. Montrer que $JMJ = \sigma(M)\,J$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit qu'elle est stochastique si, et seulement si, ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

2 Dans $M_n(\mathbb{K})$, on note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique.

1. Calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1\,;n]\!]$.
2. En déduire quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres.
3. Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales ?
4. Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les matrices triangulaires supérieures ?

3 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donner l'expression de $f(P)$ en fonction des coefficients de P. Trouver $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

4 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \qquad f(P) = P + P'$$

On note $$\mathscr{B} = \big((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1)\big)$$

C'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.[1] Déterminer la matrice de f :

- par rapport à la base canonique, au départ et à l'arrivée ;
- par rapport à la base $\mathscr{B}$ au départ et la base canonique à l'arrivée ;
- par rapport à $\mathscr{B}$, au départ et à l'arrivée.

[1]Vous devez être capable de le montrer en moins de 10 secondes.

5 Déterminer A^k dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

6 Trouver toutes les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ tells que $X^2 + X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

7 On se place dans $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base canonique. Donner la matrice de l'homothétie h de rapport 5 et celle de la projection p sur le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ parallèlement à la droite dirigée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donner la matrice de $h \circ p$.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E, de dimensions respectives p et $n-p$. On se donne une base $\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\in F}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\in G})$ de E, adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Déterminer les matrices, par rapport à la base $\mathscr{B}$ de :

- la projection sur F parallèlement à G ;
- la projection sur G parallèlement à F ;
- la symétrie par rapport a F, parallèlement à G.

Calculer la trace de ces applications.

9 Posons $$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$; en déduire que M est inversible et donner M^{-1}.

10 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

11 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 11 & -2 & 16 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

et montrer que $(X^3+2X+1, X^3-2X^2+2, X^3-2X^2+1, X^3+X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ à l'aide d'une technique matricielle.

12

1. On note $A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$

   Calculer A^n pour tout entier n (on pourra reconnaître dans A le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne).
2. Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang 1. Montrer qu'il existe $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in M_{1,p}(\mathbb{K})$, tels que $A = CL$.

13 Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) \qquad f(AB) = f(BA)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\,\mathrm{Tr}$.
Indication : On pourra utiliser la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

14 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Résoudre les équations, d'inconnue $M \in M_n(\mathbb{K})$:

$$M + (\mathrm{Tr}\,M)\,A = B \qquad \text{et} \qquad M + {}^tM = (\mathrm{Tr}\,M)\,A$$

15 Le but de cet exercice est de montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient des matrices inversibles. Pour tout $r \in [\![1\,;n]\!]$, on note $J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

1. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit une forme linéaire Φ_A sur $M_n(\mathbb{K})$ de la manière suivante :

   $$\forall M \in M_n(\mathbb{K}) \qquad \Phi_A(M) = \mathrm{Tr}\,(MA)$$

   Montrer que l'application $A \longmapsto \Phi_A$ est un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.
   Indication : On pourra utiliser la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $M_0 \in M_n(\mathbb{K})$, non nulle, telle que

   $$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \qquad (A \in H \iff \mathrm{Tr}\,(AM_0) = 0)$$

   On dit que M_0 est une matrice orthogonale à H.
3. Soient H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ et $r \in [\![1\,;n]\!]$. On suppose que J_r est orthogonal à H. Montrer que H contient une matrice inversible.
4. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

16 On appelle automorphisme d'algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ tout automorphisme de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$, qui est aussi un morphisme d'anneau. Le but de cet exercice est de déterminer les automorphismes d'algèbre de $M_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on identifie les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ avec leur matrice dans la base $\mathscr{B}$.

1. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on définit

   $$\Phi_P : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

   Montrer que Φ_P est un automorphisme d'algèbre de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Soit Φ un automorphisme d'algèbre de $M_n(\mathbb{K})$. On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ et $F_{i,j} = \Phi(E_{i,j})$ pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$.

   (a) Que dire de $F_{i,j}F_{k,\ell}$ pour $i, j, k, \ell \in [\![1\,;n]\!]$?

   (b) Montrer que $F_{1,1}$ est un projecteur non nul et en déduire qu'il existe $u_1 \in \mathbb{K}^n$, non nul, tel que $F_{1,1}u_1 = u_1$.

   (c) Pour tout $i \in [\![2\,;n]\!]$, on pose $u_i = F_{i,1}u_1$. Calculer $F_{i,j}u_k$ pour tous $i, j, k \in [\![1\,;n]\!]$ et en déduire que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

   (d) On note $P = M_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$. Montrer que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et que $\Phi = \Phi_{P^{-1}}$.