

Chapitre 12

Fonctions et régularité

12.1 Notions de topologie

Au début de ce chapitre, nous allons formaliser la notion de limite d'une fonction, qui a pour l'instant toujours été considérée comme intuitive. Une fois ceci fait, il nous faudra présenter les règles de calcul avec les limites : addition, soustraction, multiplication, division, composition. Sachant que chacune de ces limites peut être finie ou infinie, et prise en un point ou en l'infini, cela conduirait à trop de cas particuliers à considérer.

Et il nous faut donc présenter quelques notions de topologie, fort utiles pour considérer d'un seul coup toutes les possibilités de limites.

Commençons avec la droite réelle achevée

Définition 12.1.1

On appelle *droite réelle achevée* l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ constitué de \mathbb{R} auquel on ajoute deux éléments qui ne sont pas réels. On les note respectivement $+\infty$ et $-\infty$.

L'addition et la multiplication prolongent celles sur \mathbb{R} . Et on ajoute en plus les opérations suivantes :

$$+\infty + \infty = +\infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty \quad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\forall x > 0 \quad x \times (+\infty) = +\infty \quad x \times (-\infty) = -\infty$$

$$\forall x < 0 \quad x \times (+\infty) = -\infty \quad x \times (-\infty) = +\infty$$

L'ordre entre les nombres réels reste le même ; on ajoute les conventions suivantes :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

Vient ensuite la notion de voisinage :

Définition 12.1.2

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle voisinage de a tout ensemble contenant un intervalle ouvert contenant a .

Ainsi, si a appartient à \mathbb{R} , un voisinage est un ensemble qui contient un intervalle du type $]c; d[$ avec $c < a < d$.

Si $a = +\infty$, un voisinage de a est n'importe quel ensemble qui contient un intervalle du type $]c; +\infty[$. Et si $a = -\infty$, un voisinage de a est n'importe quel ensemble qui contient un intervalle du type $] -\infty, c[$.

Grosso-modo, tout ce qu'on réclame de la part d'un voisinage de a , c'est qu'il y ait, dedans, de la place (un intervalle ouvert) autour de a . De manière à ce qu'on puisse approcher a des deux côtés, sans trou.

Voici les propriétés fondamentales des voisinages :

Proposition 12.1.3

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Tout intervalle ouvert contenant a est un voisinage de a .
2. Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .
3. Une union quelconque de voisinages de a est un voisinage de a .

Preuve : Évidemment, la première proposition est vraie par définition même d'un voisinage : un intervalle contenant a contient un intervalle contenant a (lui-même).

Donnons-nous n voisinages V_1, \dots, V_n de a . Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, V_i contient un intervalle J_i contenant a . Donc $\bigcap_{i=1}^n V_i$ contient $\bigcap_{i=1}^n J_i$. Comme on l'a vu en exercice au cours du chapitre sur les fondements de l'analyse, une intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert ; donc $\bigcap_{i=1}^n J_i$ est un intervalle ouvert contenant a . Et $\bigcap_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de a .

Enfin, donnons-nous $(V_j)_{j \in J}$ une famille quelconque de voisinages de a . Chacun d'entre eux contient un intervalle ouvert contenant a ; c'est donc en particulier le cas de $\bigcup_{j \in J} V_j$. □

Définition 12.1.4

Soit I un intervalle. On appelle *adhérence* de I , notée \bar{I} , l'ensemble I auquel on ajoute ses bornes. On appelle *intérieur* de I , noté $\overset{\circ}{I}$, l'ensemble I auquel on retire ses bornes.

Définition 12.1.5

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \bar{I}$. On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a si, et seulement si, il existe un voisinage V de a tel que cette propriété soit vérifiée dans $V \cap I$.

Par exemple, la fonction \cos est décroissante au voisinage de $\pi/2$; bien qu'elle ne soit pas décroissante (tout court).

12.2 Limites

12.2.1 Limite en un point

Définition 12.2.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet ℓ comme limite en a si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \cap I \quad f(x) \in V$$

Cette définition est un poil plus abstraite que celle de la limite d'une suite. Mais elle peut être comprise d'une manière similaire : pour tout voisinage V de ℓ , aussi petit soit-il, il existe un voisinage U de a suffisamment petit (mais pas si petit quand même, puisqu'il contient tout un intervalle) tel que, dès que x appartient à $I \cap U$, $f(x)$ se retrouve coincé dans V .

Les dessins faits en cours aideront, je l'espère, à comprendre concrètement ce que signifie cette notion.

Comme pour les suites, le premier théorème sur les limites est celui d'unicité :

Théorème 12.2.2

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f admet ℓ et ℓ' comme limites en a . Alors $\ell = \ell'$.

De plus, si $a \in I$, alors $\ell = f(a)$.

Preuve : Supposons que f admet ℓ et ℓ' comme limites en a et que $\ell \neq \ell'$. On choisit alors des intervalles disjoints V_ℓ et $V_{\ell'}$, contenant respectivement ℓ et ℓ' .

Alos V_ℓ est un voisinage de ℓ et $V_{\ell'}$ est un voisinage de ℓ' . Puisque f admet ℓ comme limite en a , il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \cap I \quad f(x) \in V_\ell$$

De même, il existe un voisinage U' de a tel que

$$\forall x \in U' \cap I \quad f(x) \in V_{\ell'}$$

Or, d'après la **proposition 1.3**, $A = (U \cap I) \cap (U' \cap I)$ est un voisinage de a . Et on a

$$\forall x \in A \quad f(x) \in V_\ell \quad \text{et} \quad f(x) \in V_{\ell'}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in A \quad f(x) \in V_\ell \cap V_{\ell'}$$

ce qui contredit le fait que V_ℓ et $V_{\ell'}$ sont disjoints. Donc $\ell = \ell'$.

Maintenant, supposons qu'en plus, a appartienne à I . Commençons par montrer que $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\ell = +\infty$. Alors $]f(a); +\infty[$ est un voisinage de ℓ ; d'après la définition de la limite, il existe U voisinage de a tel que

$$\forall x \in U \quad f(x) \in]f(a); +\infty[$$

Or, $a \in U$ donc $f(a) \in]f(a); +\infty[$: contradiction. De même, on montre qu'il est exclu que $\ell = -\infty$ en considérant le voisinage $] -\infty; f(a)[$ de $-\infty$.

Bref, ℓ est donc un nombre réel. On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose $V =]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$. C'est un voisinage de ℓ et f admet ℓ comme limite en a donc il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \quad f(x) \in V$$

c'est-à-dire que

$$\forall x \in U \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

En particulier, $|f(a) - \ell| \leq \varepsilon$. Cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $f(a) = \ell$. □

Définition 12.2.3

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que f admette ℓ comme limite en a . Dans la mesure où ℓ est la seule et unique limite possible, on dira que ℓ est la *limite de f en a* et on notera :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \lim_a f = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

Notre définition d'une limite, pour abstraite qu'elle puisse paraître, présente l'avantage de traiter tous les cas de limites d'un coup : limites en un point, en $-\infty$ ou en $+\infty$; limites finies ou infinies. Mais dans chacun de ces cas particulier, elle peut être formulée de manière plus concrète.

Proposition 12.2.4

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. ℓ est la limite de f en a si et seulement si :

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$:

$$\forall M > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M)$$

Notons que dans ce cas là, a n'est pas dans I , comme on a pu le voir dans la preuve du **théorème 2.2**.

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$:

$$\forall M < 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq M)$$

Même remarque que précédemment : a n'appartient pas à I .

- Si $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$

$$\forall M > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad (x \geq \alpha \implies f(x) \geq M)$$

- Si $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$

$$\forall M < 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad (x \geq \alpha \implies f(x) \leq M)$$

- Si $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad (x \geq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

- Si $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$

$$\forall M > 0 \quad \exists \alpha < 0 \quad \forall x \in I \quad (x \leq \alpha \implies f(x) \geq M)$$

- Si $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$

$$\forall M < 0 \quad \exists \alpha < 0 \quad \forall x \in I \quad (x \leq \alpha \implies f(x) \leq M)$$

- Si $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha < 0 \quad \forall x \in I \quad (x \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Bien évidemment, il serait idiot d'apprendre ces relations par cœur. Ce sont de simples traductions de la **définition 2.1** dans chacun des neuf contextes ci-dessus ; et il est important de comprendre pourquoi.

Théorème 12.2.5

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_a f = \ell \iff \lim_a (f - \ell) = 0$
- Si $a \in \mathbb{R}$, $\lim_a f = \ell \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \ell$

Preuve : Supposons d'abord que $\ell \in \mathbb{R}$, de sorte que la fonction $f - \ell$ soit bien définie. On suppose que $\lim_a f = \ell$. Soit V un voisinage de 0. Alors $V_\ell = \{x + \ell \mid x \in V\}$ est un voisinage de ℓ et il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \quad f(x) \in V_\ell$$

c'est-à-dire $\forall x \in U \quad \exists y \in V \quad f(x) = y + \ell$

ou encore $\forall x \in U \quad \exists y \in V \quad f(x) - \ell = y$

donc $\forall x \in U \quad (f(x) - \ell) \in V$

Ce qui montre que $\lim_a (f - \ell) = 0$. La réciproque se montre de la même manière.

Maintenant, supposons que $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que a n'est pas $+\infty$ ou $-\infty$. Ainsi, on peut parler sans problème de $f(a + h)$ pour tout réel h tel que $a + h \in I$. Soit V un voisinage de ℓ . Puisque $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \quad f(x) \in V$$

Posons alors $U_0 = \{x - a \mid x \in U\}$: c'est un voisinage de 0. On a alors

$$\forall h \in U_0 \quad \underbrace{f(a+h)}_{\in U} \in V$$

ce qui montre que $\lim_0 f(a + h) = \ell$. □

Théorème 12.2.6

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_a f = \ell$. Alors f est bornée au voisinage de a .

En Français : une fonction qui admet une limite **finie** en a est bornée tant qu'on ne s'éloigne pas trop de a . Ce n'est pas étonnant : par intuition de ce que signifie l'existence d'une limite, si x est proche de a , $f(x)$ est proche de ℓ . Donc $f(x)$ ne peut pas être trop grand. La preuve est très simple.

Preuve : L'intervalle $V =]\ell - 1 ; \ell + 1[$ est un voisinage de ℓ . Donc il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \quad f(x) \in V$$

c'est-à-dire que $\forall x \in U \quad \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$

f est bien bornée dans un voisinage de a . □

12.2.2 Limites à gauche et à droite

Définition 12.2.7

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

Si f est définie au voisinage de a , à gauche. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si et seulement si la restriction de f à $I \cap]-\infty ; a[$ admet pour limite ℓ . On écrira

$$\ell = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \ell = \lim_{a^-} f \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$$

Si f est définie au voisinage de a , à droite, on dit que f admet ℓ pour limite à droite en a si et seulement si la restriction de f à $I \cap]a; +\infty[$ admet pour limite ℓ . On écrira

$$\ell = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \ell = \lim_{a^+} f \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$$

Comme précédemment, la définition est formulée de manière abstraite, dans un but unificateur. Voici sa traduction dans les différents cas :

Proposition 12.2.8

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On suppose f définie dans un voisinage à gauche de a . Alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ si et seulement si

- Si $\ell = -\infty$:

$$\forall M < 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (a - \eta \leq x < a \implies f(x) \leq M)$$

- Si $\ell = +\infty$:

$$\forall M > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (a - \eta \leq x < a \implies f(x) \geq M)$$

- Si $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (a - \eta \leq x < a \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Je vous fais le cadeau des limites à droite. Une des utilités de ces notions est de caractériser l'existence d'une limite pour une fonction. Comme on s'y attend,

Théorème 12.2.9

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \overset{\circ}{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors f tend vers ℓ en a si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $f(a) = \ell$;
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$;
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Preuve : Supposons que f admet ℓ comme limite en a . Comme a est un point intérieur à I , il appartient à I et le **théorème 2.2** affirme que $f(a) = \ell$. Cela implique automatiquement que ℓ n'est pas infini. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

En jetant un œil à la **proposition 2.8**, on voit que f tend vers ℓ à gauche en a . Et si on exprimait en quantificateurs la propriété $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$, on verrait que f tend vers ℓ en a à droite.

Réciproquement, supposons que les trois propriétés 1, 2 et 3 sont satisfaites. Alors ℓ n'est pas infini et on doit donc montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme on sait que f tend vers ℓ à gauche, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad (a - \eta \leq x < a \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

De même, comme f tend vers ℓ à droite, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad (a < x \leq a + \eta_2 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Posons alors $\eta = \text{Min}(\eta_1, \eta_2)$. De sorte que

$$a - \eta \geq a - \eta_1 \quad \text{et} \quad a + \eta \leq a + \eta_2$$

Du coup, $\forall x \in I \setminus \{a\} \quad (a - \eta \leq x \leq a + \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$

Enfin, si $x = a$, on a $|f(x) - \ell| = |f(a) - f(a)| = 0$ donc au final,

$$\forall x \in I \quad (a - \eta \leq x \leq a + \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Ce qui établit que f tend vers ℓ en a . □

12.2.3 Limites et inégalités

Théorème 12.2.10

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que f est positive au voisinage de a et qu'elle tend vers ℓ en a . Alors $\ell \geq 0$.

Preuve : On suppose que $\ell < 0$. Alors l'intervalle $] \frac{3\ell}{2}; \frac{\ell}{2} [$ est un voisinage de ℓ et il existe donc un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \quad \frac{3\ell}{2} \leq f(x) \leq \frac{\ell}{2} < 0$$

Or, on sait aussi qu'il existe un voisinage U' de a sur lequel f est positive. Par conséquent, sur $U \cap U'$, f est strictement négative et positive à la fois. C'est une contradiction. Du coup, $\ell \geq 0$. □

Le corollaire suivant peut être résumé ainsi : les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, pour peu qu'on ait vérifié avant que les limites existent.

Corollaire 12.2.11

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I , $a \in \bar{I}$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de a et que f et g admettent chacune une limite finie en a . Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

En particulier :

- si f est majorée par un nombre réel M au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M$;
- si g est minorée par un nombre réel m au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \geq m$.

12.2.4 Opérations sur les limites

Prenez les tableaux résumant les règles d'addition, multiplication et division de limites de suites ; ce sont les mêmes pour les limites de fonctions.

Faisons maintenant des choses nouvelles. Tout d'abord, comme promis, le théorème de composition d'une fonction par une suite.

Théorème 12.2.12

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et u une suite à valeurs dans I . Soient $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$\lim_a f = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\infty} u = a$$

Alors

$$\lim_{\infty} f(u_n) = \ell$$

Preuve : Dire que u converge vers a , c'est dire que pour tout voisinage V de a , il existe un entier N tel que

$$\forall n \geq N \quad u_n \in V$$

Soit V un voisinage de ℓ ; comme f tend vers ℓ en a , il existe un voisinage U de a tel que

$$\forall x \in U \quad f(x) \in V$$

Et comme u tend vers a , il existe un entier N tel que

$$\forall n \geq N \quad u_n \in U$$

Par suite,

$$\forall n \geq N \quad f(u_n) \in V$$

ce qui démontre que $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. □

Théorème 12.2.13

Soient f et g deux fonctions, définies respectivement sur des intervalles I et J , telles que $f(I) \subset J$ de sorte que $g \circ f$ soit bien définie. Soient

$$a \in \bar{I} \quad b \in \bar{J} \quad \ell \in \bar{\mathbb{R}}$$

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$$

Preuve : Soit V un voisinage de ℓ . On sait qu'il existe un voisinage U de b tel que

$$\forall x \in U \quad g(x) \in V$$

Et comme U est un voisinage de b , qui est la limite de f en a , il existe un voisinage W de a tel que

$$\forall x \in W \quad f(x) \in U$$

Alors

$$\forall x \in W \quad g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in U}) \in V$$

ce qui établit que $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$. □

12.2.5 Théorèmes d'existence

Théorème 12.2.14 (Théorème des gendarmes)

Soient f , g et h trois fonctions définies dans un voisinage I de $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et telles que

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

On suppose que f et h admettent chacune la même limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ en a . Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe et vaut ℓ .

Preuve : Supposons dans un premier temps que ℓ est fini. Soit V un voisinage de ℓ ; par définition, V contient un intervalle contenant ℓ . Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] \ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [\subset V$.

Comme f et h admettent ℓ comme limite en a , il existe voisinages U_1 et U_2 de a , tels que

$$\forall x \in U_1 \cap I \quad f(x) \in V$$

et

$$\forall x \in U_2 \cap I \quad h(x) \in V$$

En particulier,

$$\forall x \in U_1 \cap U_2 \cap I \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$$

donc

$$\forall x \in U_1 \cap U_2 \cap I \quad g(x) \in] \ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [\subset V$$

Comme $U_1 \cap U_2 \cap I$ est un voisinage de a , on a bien montré que g admet une limite en a et que cette limite est ℓ .

Supposons maintenant que $\ell = +\infty$. On sait alors qu'il existe un voisinage I' de a tel que

$$\forall x \in I' \quad f(x) > 0$$

donc

$$\forall x \in I' \quad 0 \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

La fonction $1/f$ tend vers 0 en a , puisque f tendent vers $+\infty$. D'après ce qui précède, $1/g$ tend aussi vers 0, par valeurs supérieures, en a . Donc g tend vers $+\infty$.

De même si $\ell = -\infty$. □

Corollaire 12.2.15

Soient f une fonction bornée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et g une fonction de limite nulle en a . Alors $f g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Théorème 12.2.16 (Théorème de la limite monotone)

Soient f une application définie sur un intervalle I , croissante, et $a \in \overline{I}$.

- Si $a \in \overset{\circ}{I}$: alors f admet des limites en a à gauche et à droite et on a

$$\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f$$

- Si $a = \text{Sup} I$: alors f admet une limite en a . Cette limite est finie si f est majorée, et vaut $+\infty$ sinon.
- Si $a = \text{Inf} I$: alors f admet une limite en a . Cette limite est finie si f est minorée, et vaut $-\infty$ sinon.

Preuve : Commençons avec le premier cas. Posons

$$m = \text{Sup} \{f(x) \mid x < a\} \quad \text{et} \quad M = \text{Inf} \{f(x) \mid x > a\}$$

Observons d'abord que, comme f est croissante,

$$\forall x < a \quad f(x) \leq f(a)$$

et

$$\forall x > a \quad f(x) \geq f(a)$$

Donc

$$m \leq f(a) \leq M$$

Ensuite, donnons-nous $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation des bornes supérieure et inférieure, il existe $x_0 < a$ et $x_1 > a$ tels que

$$m - \varepsilon < f(x_0) \leq m \quad \text{et} \quad M \leq f(x_1) < M + \varepsilon$$

Posons $\eta_1 = a - x_0 > 0$ et $\eta_2 = x_1 - a > 0$

Comme f est croissante, on a

$$\forall x \in]a - \underbrace{\eta_1}_{=x_0}; a[\quad m - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq m$$

et $\forall x \in]a; \underbrace{a + \eta_2}_{=x_1}[\quad M \leq f(x) \leq f(x_1) \leq M + \varepsilon$

Ceci montre exactement que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M$$

et achève la preuve de la première assertion.

Pour les deux autres, ça marche de la même manière. □

12.3 Relations de comparaison

De la même manière que pour les suites, nous allons définir des relations de comparaison entre fonctions, dans le but d'étudier plus finement le comportement local de celles-ci.

12.3.1 Négligeabilité

Définition 12.3.1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , soit $a \in \bar{I}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si, et seulement si, il existe une fonction ε , définie sur I et tendant vers 0 en a telle que $f = \varepsilon g$ au voisinage de a . On note alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g) \quad \text{ou bien} \quad f \underset{a}{=} o(g)$$

On voit que, de manière équivalente, f est négligeable devant g si et seulement si la fonction f/g , définie sur $I \setminus \{a\}$, tend vers 0 en a . Cette caractérisation est utile pour démontrer immédiatement les résultats suivants :

Théorème 12.3.2

1. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Soient $a \in \bar{I}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $f \underset{a}{=} o(g)$. Alors

$$\lambda f = o(g) \quad \text{et} \quad f = o(\lambda g) = o(g)$$

2. Soient f, g et h trois fonctions telles que

$$f \underset{a}{=} o(h) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} o(h)$$

Alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$

3. Soient f, g et h trois fonctions telles que

$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} o(h)$$

Alors $f \underset{a}{=} o(h)$

4. Soient f, g, h, k quatre fonctions, telles que

$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad h \underset{a}{=} o(k)$$

Alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$

5. Soient f et g deux fonctions telles que $f \underset{a}{=} o(g)$. Soit φ une application définie au voisinage de b , telle que $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$$

Les remarques accompagnant ce théorème sont les mêmes que pour les suites :

1. On peut multiplier une relation de négligeabilité par un nombre réel non nul, cela ne change rien.
2. Si deux fonctions sont négligeables devant une même troisième, leur somme est négligeable devant celle-ci.
3. La négligeabilité se transmet transitivement.
4. Multiplier une relation de négligeabilité membre à membre ne pose aucun problème.
5. On peut composer **à droite** une relation de négligeabilité par une fonction.

En revanche, on **ne peut pas ajouter membre à membre** des relations négligeabilité. Par exemple,

$$x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2 + 4) \quad \text{et} \quad -x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(-x^2)$$

Si on ajoute membre à membre ces relations, on obtient

$$1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(4)$$

ce qui est clairement faux.

Les théorèmes de croissances comparées que nous avons vus au début de l'année se récrivent en termes de « petit o » :

$$\forall \alpha < \beta \quad x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0 \quad \ln^\beta x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o(|\ln x|^\beta)$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0 \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha x}) \quad \text{et} \quad e^{-\beta x} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$$

Enfin, le fait qu'une fonction f admette une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a s'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$.

12.4 Continuité

12.4.1 Les théorèmes généraux

Définition 12.4.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a .

On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

On dit que f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

De manière équivalente, f est continue en a si et seulement si $f(x) = f(a) + o(1)$.

Proposition 12.4.2

$\mathcal{C}^0(I)$ est une algèbre, c'est-à-dire que

1. la somme de deux fonctions continues est continue;
2. le produit de deux fonctions continues est continue;
3. le produit d'une fonction continue par un scalaire est continu.

Preuve : Tous ces résultats sont des conséquences dérivées des résultats de manipulations de limites.

Ainsi, supposons par exemple que f et g sont continues sur I . Soit $a \in I$. Alors $\lim_a f$ et $\lim_a g$ existent et sont finies et on sait alors que $\lim_a (f + g)$ existe et vaut $\lim_a f + \lim_a g$.

De même pour les autres points. □

Ajoutons le théorème de composition :

Théorème 12.4.3

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$, avec $g(J) \subset I$. Alors $f \circ g \in \mathcal{C}^0(J)$.

Preuve : Application directe du théorème de composition des limites. □

Définition 12.4.4

Soient I un intervalle et $a \in I$. Soit $f \in \mathcal{C}(I \setminus \{a\})$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existent, sont finies et sont égales à un nombre réel ℓ .

Dans ce cas, la fonction \bar{f} définie par

$$\forall x \in I \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée le prolongement par continuité de f en a .

12.4.2 Les grands théorèmes

Théorème 12.4.5 (Théorème de bornitude)

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Preuve : Soient $I = [a; b]$ un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé) et $f \in \mathcal{C}(I)$.

On suppose $|f|$ non majoré. En d'autres termes,

$$\forall M > 0 \quad \exists x \in I \quad |f(x)| \geq M$$

En particulier, pour chaque entier n , on peut trouver un $x_n \in I$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_n \leq b$$

D'après le théorème de **Bolzano-Weierstrass**, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, convergente vers une limite ℓ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$$

donc

$$a \leq \ell \leq b$$

en passant à la limite dans l'inégalité. Donc ℓ appartient à I . On a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_{\varphi(n)})| = +\infty$$

D'un autre côté, $|f|$ est continue en ℓ donc, d'après le théorème de composition des suites par des fonctions,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_{\varphi(n)})| = |f(\ell)|$$

C'est une contradiction. Donc $|f|$ est majorée. Et f est bornée.

Montrons qu'elle atteint ses bornes. Posons $M = \text{Sup } f$. Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in I \quad M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in I \quad M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$$

À l'aide de Bolzano-Weierstrass, on extrait une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite ℓ . Comme au-dessus, on a $\ell \in I$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$$

Enfin

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$$

D'après le **théorème des gendarmes**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = M$$

Or, f est continue en ℓ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\ell)$$

Par suite,

$$f(\ell) = M = \text{Sup } f$$

Le supremum de f est atteint.

De la même manière, on montre que l'infimum est atteint. □

Théorème 12.4.6 (Théorème des valeurs intermédiaires 1)

Soit f continue sur un segment $[a; b]$. On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Alors f s'annule au moins une fois sur $[a; b]$.

Preuve : Supposons par exemple que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$; si ce n'est pas le cas, il suffit de changer f en $-f$. Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a; b] \mid f(x) \leq 0\}$$

Alors A n'est pas vide (il contient a) et il est majoré par b . Il admet donc une borne supérieure qu'on note y . Par définition de la borne supérieure, pour tout entier n non nul, il existe x_n dans A tel que

$$y - \frac{1}{n} \leq x_n \leq y$$

D'après le théorème des gendarmes, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$; en outre,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \leq x_n \leq b$$

donc

$$a \leq y \leq b$$

Comme f est continue sur I , elle admet une limite en y donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(y)$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x_n) \leq 0$$

donc

$$f(y) \leq 0$$

Dans la mesure où $f(b) > 0$, y ne peut être égal à b donc $y < b$. Il existe donc un entier N tel que $y + \frac{1}{N} < b$. Pour tout $n \geq N$, $y + \frac{1}{n}$ majore y qui majore A , donc ne se trouve pas dans A . Par suite,

$$\forall n \geq N \quad f\left(y + \frac{1}{n}\right) > 0$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(y + \frac{1}{n}\right) = y$$

donc

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(y + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

Ce qui achève la démonstration, puisque $f(y) = 0$ □

Voilà voilà... Ce théorème fondamental confirme ce que notre intuition nous dit : le graphe d'une fonction continue ne peut pas passer des y négatifs aux y positifs sans passer au moins une fois par 0.

Théorème 12.4.7 (Théorème des valeurs intermédiaires 2)

Si f est continue sur $[a; b]$, elle atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve : Soit $y \in [f(a); f(b)]$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - y$ est continue sur $[a; b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a; b]$ et vérifie

$$g(a) = f(a) - y \leq 0 \quad g(b) = f(b) - y \geq 0$$

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires 1**, il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire que $f(c) = y$. □

Théorème 12.4.8 (Théorème des valeurs intermédiaires 3)

L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

Preuve : Soient I un intervalle et f continue sur I . On pose $J = f(I)$ et on se donne $y_1 < y_2$ dans J . Par définition, ces nombres peuvent s'écrire

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{et} \quad y_2 = f(x_2) \quad \text{avec} \quad x_1, x_2 \in I$$

Pour montrer que J est un intervalle, il suffit de montrer que J contient n'importe quelle valeur comprise entre y_1 et y_2 . C'est exactement ce que dit le **théorème des valeurs intermédiaires 2**. \square

Corollaire 12.4.9

Soient $a < b$ des nombres réels et f une fonction.

- Si f est strictement croissante et continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est strictement croissante et continue sur $[a; b[$, alors $f([a; b[) = [f(a); \lim_{b^-} f[$.
- Si f est strictement croissante et continue sur $]a; b]$, alors $f(]a; b]) =]\lim_{a^+} f; f(b)]$.
- Si f est strictement croissante et continue sur $]a; b[$, alors $f(]a; b[) =]\lim_{a^+} f; \lim_{b^-} f[$.
- Si f est strictement décroissante et continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.
- Si f est strictement décroissante et continue sur $[a; b[$, alors $f([a; b[) =]\lim_{b^-} f; f(a)]$.
- Si f est strictement décroissante et continue sur $]a; b]$, alors $f(]a; b]) = [f(b); \lim_{a^+} f[$.
- Si f est strictement décroissante et continue sur $]a; b[$, alors $f(]a; b[) =]\lim_{b^-} f; \lim_{a^+} f[$.

Remarquons que l'existence de ces limites (finies ou infinies) est garantie par le **théorème de la limite monotone**. Nous allons nous abstenir de prouver ce théorème car il y a 8 cas à considérer et c'est relou ; il s'agit simplement de combiner le **théorème de la limite monotone** et le **théorème des valeurs intermédiaires 3**.

Théorème 12.4.10 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . f réalise une injection sur I si et seulement si elle est strictement monotone. Dans ce cas, f réalise une bijection de I sur $f(I)$; sa réciproque est continue et du même sens de variation que f .

Preuve : Supposons d'abord f strictement monotone sur I . Alors si $x \neq y$ sont dans I , on peut comparer $f(x)$ et $f(y)$ avec une inégalité stricte et ils sont donc distincts.

Réciproquement, supposons que f est injective, mais qu'elle n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. Cela signifie qu'il existe $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$ tels que

$$f(x_1) \geq f(y_1) \quad \text{et} \quad f(x_2) \leq f(y_2)$$

On peut même assurer que ces inégalités sont strictes car f est injective.

On pose alors $\forall \lambda \in [0; 1] \quad g(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$

Comme somme de composées de fonctions continues, g est continue sur I . De plus,

$$g(0) = f(x_2) - f(y_2) < 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(x_1) - f(y_1) > 0$$

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires 1**, il existe $\lambda_0 \in [0; 1]$ tel que $g(\lambda_0)$ soit nul. C'est-à-dire que

$$f(\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0)x_2) = f(\lambda_0 y_1 + (1 - \lambda_0)y_2)$$

Comme f est injective,

$$\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0)x_2 = \lambda_0 y_1 + (1 - \lambda_0)y_2$$

d'où

$$\lambda_0(x_1 - y_1) = (1 - \lambda_0)(y_2 - x_2)$$

En outre, λ_0 ne peut être 0 ou 1 puisque $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$. Donc le membre de gauche est strictement négatif et le membre de droite est strictement positif. C'est impossible. Donc f est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Supposons maintenant que f est strictement monotone, donc injective sur I . Alors elle atteint toutes les valeurs dans $J = f(I)$ et réalise donc une bijection de I sur J . Notons f^{-1} sa bijection réciproque et montrons qu'elle est continue, de même sens de variation que f .

Pour fixer les idées, supposons f strictement croissante et donnons-nous $y_1 < y_2$ dans J . On suppose que $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Comme f est croissante, appliquer f ne change pas le sens de l'inégalité donc $y_1 \geq y_2$. C'est une contradiction, donc $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante sur J .

Finalement, supposons que f^{-1} n'est pas continue sur J . Il existe alors $y \in J$ tel que f^{-1} ne soit pas continue en y . Du coup, y ne peut être la borne droite ou la borne gauche de J puisqu'une fonction monotone sur un intervalle admet une limite aux bornes de celui-ci, d'après le **théorème de la limite monotone**. Autrement dit, y est à l'intérieur de J .

Dire que f^{-1} n'est pas continue en y signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \exists y' \in]y - \eta; y + \eta[\cap J \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| > \varepsilon$$

En particulier, si n est un entier non nul fixé, il existe $y_n \in J$ tel que

$$y - \frac{1}{n} \leq y_n \leq y + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_n)| > \varepsilon$$

D'après le **théorème des gendarmes** (pour les suites), la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y .

Comme y est à l'intérieur de J , il existe $\alpha > 0$ tel que $]y - \alpha; y + \alpha[\subset J$. Et comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad y_n \in]y - \alpha; y + \alpha[\subset J$$

Comme f^{-1} est croissante,

$$\forall n \geq N \quad f^{-1}(y - \alpha) \leq f^{-1}(y_n) \leq f^{-1}(y + \alpha)$$

Donc la suite $(f^{-1}(y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et d'après le **théorème de Bolzano-Weierstrass**, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(f^{-1}(y_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite qu'on note x . Or, f est continue en x donc d'après le **théorème de composition des limites**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(f^{-1}(y_{\varphi(n)}))}_{=y_{\varphi(n)}} = f(x)$$

et il s'ensuit que $f(x) = y$. Autrement dit, $x = f^{-1}(y)$. Or, on avait

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{-1}(y_{\varphi(n)}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$$

ce qui assure

$$|x - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon > 0$$

par passage à la limite dans l'inégalité. C'est une contradiction. Donc f^{-1} est continue sur J . \square

C'est ce théorème qui garantit la continuité des fonctions réciproques que nous avons étudiées l'année dernière.

Par exemple, \cos est continue et strictement décroissante sur $[0; \pi]$. Elle réalise donc une bijection continue de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$; sa bijection réciproque, qu'on appelle \arccos , est continue sur $[-1; 1]$.

12.5 Dérivation

12.5.1 Résultats généraux

Définition 12.5.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si, et seulement si, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, définie sur $I \setminus \{a\}$, peut être prolongée par continuité en a .

Cette définition admet plusieurs formulations équivalentes :

- D'après la définition du prolongement par continuité, f est *dérivable en a* si et seulement si τ_a admet en a une limite à gauche et une limite à droite et celles-ci sont égales.

Leur valeur commune est appelée *nombre dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$ ou encore $Df(a)$.

Dans le cas où τ_a admet une limite en a à gauche, on dit que f est *dérivable à gauche en a* ; cette limite est notée $f'_g(a)$ et appelée *nombre dérivé à gauche de f en a* .

Si τ_a admet une limite en a à droite, on dit que f est *dérivable à droite en a* ; cette limite est notée $f'_d(a)$ et appelée *nombre dérivé à droite de f en a* .

Ainsi, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a , et les dérivées à gauche et à droite sont égales. C'est cette valeur commune qui est le nombre dérivé de f en a .

- On a successivement

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable en } a &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \\ &\iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{=} f'(a) + o(1) \\ f \text{ dérivable en } a &\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a) \end{aligned}$$

À ce stade, on voit (intuitivement) que f est dérivable en a si, et seulement si, la droite d'équation « $y = f(a) + (x - a)f'(a)$ » approche, au voisinage de a , la courbe représentative de f avec une précision négligeable devant $(x - a)$. La dérivabilité nous permet donc de trouver la meilleure approximation de f par une fonction linéaire, au voisinage de a .

- Puisque le point a , en lequel on étudie la dérivabilité de f , se trouve dans I , on peut aussi dire que

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable en } a &\iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \\ &\iff f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h) \end{aligned}$$

C'est cette formulation de la dérivabilité en a que nous manipulerons le plus, car elle se ramène à une étude en 0, toujours plus agréable à faire qu'en un autre point ; et elle a l'avantage d'utiliser la notation « petit o » qui est très souple.

Ainsi, si on arrive à montrer qu'il existe un nombre réel ℓ tel que $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + h\ell + o(h)$, alors f sera dérivable en a et ℓ est le nombre dérivé de f en a .

On constate que

Théorème 12.5.2

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Preuve : On sait que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

donc en particulier

$$f(a+h) = f(a) + o(1)$$

ce qui signifie précisément que f admet une limite en a . Donc f est continue en a . \square

N'allez surtout pas imaginer une réciproque à ce théorème : une fonction continue en un point n'a aucune raison d'être dérivable. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en ce point, puisque les dérivées gauche et droite valent respectivement -1 et 1 . Ou encore $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais le taux d'accroissement a une limite infinie en 0.

Voici maintenant les théorèmes généraux sur la dérivabilité :

Théorème 12.5.3

Soient f et g deux fonctions dérivables en a .

- *Leur somme est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
- *Leur produit est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *Si g ne s'annule pas dans un voisinage de a , leur rapport est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Preuve : Supposons f et g dérivables en a . Cela signifie que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \quad \text{et} \quad g(a+h) = g(a) + hg'(a) + o(h)$$

Alors $(f+g)(a+h) = f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + h(f'(a) + g'(a)) + o(h)$

ce qui établit la première proposition. Ensuite,

$$(fg)(a+h) = f(a+h)g(a+h) = f(a)g(a) + h(f'(a)g(a) + g(a)f'(a)) + o(h) + \text{termes en } h^2$$

Les termes en h^2 sont négligeables devant h donc fg est dérivable en a et son nombre dérivé en a est $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Enfin, pour le rapport, on a, en supposant $g(a) \neq 0$:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a) + o(h)}{g(a) + hg'(a) + o(h)} = \frac{1}{g(a)} \frac{f(a) + hf'(a) + o(h)}{1 + hg'(a)/g(a) + o(h)}$$

On connaît l'approximation $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$ donc

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} &= \frac{1}{g(a)} (f(a) + hf'(a) + o(h)) \left(1 - h \frac{g'(a)}{g(a)} + o(h) \right) \\ &= \frac{1}{g(a)} \left(f(a) + h \left(f'(a) - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)} \right) + o(h) + \text{termes en } h^2 \right) \end{aligned}$$

Les termes en h^2 sont négligeables devant h donc

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a)}{g(a)} + h \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} + o(h)$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 12.5.4 (Dérivation d'une composée)

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J , telles que $f(I) \subset J$. On suppose f dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $f(a) \in J$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$$

Preuve : On sait que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \quad \text{et} \quad g(f(a)+h) = g(f(a)) + hg'(f(a)) + o(h)$$

donc

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a) + hf'(a) + o(h)) \\ &= g(f(a)) + hg'(f(a))(hf'(a) + o(h)) + o(hf'(a) + o(h)) \\ &= g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + o(h) \end{aligned}$$

Ici, comme d'habitude, on a négligé les termes en h^2 devant h . □

Théorème 12.5.5 (Dérivée de l'inverse d'une bijection)

Soit f continue, bijective de I sur $f(I)$, dérivable en $a \in I$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et on a

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(f(a))}$$

Preuve : Supposons d'abord que f^{-1} est dérivable en a . On sait que $f^{-1} \circ f$ est l'identité sur I donc sa dérivée vaut 1 en a . Mais aussi, d'après le théorème de dérivée d'une composée,

$$1 = (f^{-1} \circ f)'(a) = f'(a)(f^{-1})'(f(a))$$

donc $f'(a)$ n'est pas nul.

Réciproquement, supposons que $f'(a) \neq 0$. Comme f est continue, $J = f(I)$ est un intervalle contenant $f(a)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc $m > 0$ tel que l'intervalle $[f(a) - m; f(a) + m]$ soit inclus dans J .

Si h est un nombre réel tel que $|h| \leq m$, $f(a) + h$ appartient à J ; f étant bijective de I sur J , il existe un unique nombre $H(h)$ tel que $f(a) + h = f(a + H(h))$. D'ailleurs, on peut exprimer $H(h)$ à l'aide de f^{-1} puisque :

$$f(a) + h = f(a + H(h)) \iff H(h) = f^{-1}(f(a) + h) - a$$

D'après le théorème de composition des limites et parce que f^{-1} est continue en $f(a)$ (théorème de la bijection), H admet une limite en 0 et

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f^{-1}(f(a) + h) - a) = a - a = 0$$

Maintenant qu'on sait que $\lim_0 H = 0$, on peut écrire, à l'aide de la dérivabilité de f en a ,

$$f(a) + h = f(a + H(h)) = f(a) + H(h)f'(a) + o(H(h))$$

d'où

$$h = H(h)f'(a) + o(H(h))$$

soit encore, puisque $f'(a) \neq 0$, $H(h)f'(a) \sim h$. Du coup, $H(h) \sim h/f'(a)$ ce qui permet d'écrire

$$H(h) = \frac{h}{f'(a)} + o(h)$$

Il s'ensuit que

$$f^{-1}(f(a) + h) = a + H(h) = a + \frac{h}{f'(a)} + o(h)$$

ce qui montre que f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et donne la dérivée de f^{-1} en ce point. □

C'est ce théorème que nous avons utilisé pour démontrer la dérivabilité de toutes les fonctions réciproques que nous avons construites. Par exemple, la fonction sin est continue bijective de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. Si $a \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin' a = \cos a$ qui n'est pas nul. Donc arcsin est dérivable en $\sin a$. C'est-à-dire que arcsin est dérivable sur $] - 1 ; 1 [$.

12.5.2 Les espaces \mathcal{C}^n

Reloud.

12.5.3 Le théorème de Rolle et ses conséquences

Commençons par une observation sur les extrema d'une fonction :

Théorème 12.5.6

Soient f définie sur I et a un point intérieur à I . On suppose que f est dérivable en a et qu'elle admet un extremum local en ce point. Alors $f'(a) = 0$.

Preuve : Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet un maximum local en a . Cela signifie qu'il existe $h > 0$ tel que $[a - h; a + h] \subset I$ et que

$$\forall x \in [a - h; a + h] \quad f(x) \leq f(a)$$

Alors

$$\forall x \in [a - h; a[\quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et

$$\forall x \in]a; a + h] \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Puisque f admet une dérivée en a , les taux d'accroissements ci-dessus tendent vers $f'(a)$ en a et on peut appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités :

$$f'(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(a) \leq 0$$

Par suite, $f'(a) = 0$. □

Ce théorème nous donne donc une condition nécessaire sur les extrema locaux d'une fonction f dérivable sur I : ils doivent être cherchés parmi les zéros de f' .

Remarquons aussi qu'il n'y a pas de réciproque : ce n'est pas parce que $f'(a) = 0$ que f admet un extremum local en a . La fonction $x \mapsto x^3$ est un bon contre-exemple.

Théorème 12.5.7 (Théorème de Rolle)

Soit f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve : Comme f est continue sur $[a; b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. Donc elle atteint son minimum m et son maximum M en des points c_m et c_M respectivement.

Si c_m et c_M ne sont tous deux pas intérieurs à $[a; b]$, c'est qu'ils valent soit a , soit b . Et donc que $f(a) = f(b) = m = M$. Auquel cas,

$$\forall x \in [a; b] \quad m \leq f(x) \leq M = m$$

et f est constante. Sa dérivée s'annule en tout point de $]a; b[$ et le théorème est démontré.

Si c_m ou c_M est intérieur à $]a; b[$, le **théorème 5.6** montre que f' s'annule en ce point. □

Corollaire 12.5.8 (Théorème des accroissements finis)

Soit f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Preuve : Posons $\forall x \in [a; b] \quad g(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f'(x)$

g est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et on constate que

$$g(a) = g(b) = a f(b) - b f(a)$$

D'après le **théorème de Rolle**, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$. Le calcul de g' donne alors

$$f(b) - f(a) - (b - a)f'(c) = 0 \quad \square$$

Corollaire 12.5.9 (Inégalité des accroissements finis)

Soit f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, telle que f' soit minorée par m et majorée par M sur $]a; b[$. Alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Preuve : D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Dans la mesure où $b - a \geq 0$ et $m \leq f'(c) \leq M$, on a bien l'inégalité recherchée. □

Corollaire 12.5.10 (Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle)

Soit f continue et dérivable sur $[a; b]$. Elle est constante sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée y est identiquement nulle.

Preuve : Si f est constante sur $[a; b]$, sa dérivée y est nulle, on le sait déjà.

Réciproquement, supposons que $f' = 0$ sur $]a; b[$. Soit $x \in]a; b[$. D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $c \in]a; x[$ tel que

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = 0$$

donc

$$f(x) = f(a)$$

et f est bien constante sur $[a; b]$. □

Corollaire 12.5.11 (Sens de variation et signe de la dérivée)

Soit f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Elle est croissante sur $[a; b]$ si et seulement si f' est positive sur $]a; b[$.

Si f' est strictement positive sur $]a; b[$, alors f est strictement croissante sur $[a; b]$.

Preuve : Supposons f' positive sur $]a; b[$. Soient x et y dans $[a; b]$, tels que $x < y$. D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $c \in]x; y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq y - x \geq 0$$

donc

$$f(y) \geq f(x)$$

et f est croissante. Si on avait supposé f' strictement positive sur $]a; b[$, les inégalités ci-dessus auraient été strictes et on aurait obtenu que f' est strictement croissante.

Réciproquement, supposons f croissante sur $[a; b]$. Soit $x_0 \in]a; b[$. On a

$$\forall x \in [a; b] \quad \begin{cases} x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{cases}$$

Dans le premier cas, numérateur et dénominateur sont négatifs; dans le second, ils sont positifs. Donc, en faisant tendre x vers x_0 , on trouve $f'(x_0) \geq 0$. □

Corollaire 12.5.12 (Théorème des accroissements finis généralisé)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Observons que la seule hypothèse « g' ne s'annule pas sur $]a; b[$ » suffit à assurer que $g(b) - g(a) \neq 0$ et autorise donc à former le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$: c'est simplement la contre-apposée du **théorème de Rolle**.

Preuve : Il suffit de poser

$$\forall x \in [a; b] \quad h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

h est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et prend la même valeur en a et b . Il suffit d'appliquer le **théorème de Rolle**. □

Corollaire 12.5.13 (Théorème de Taylor)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur $]a; b[$, $n + 1$ fois dérivable sur $]a; b[$. Il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Preuve : Posons

$$\forall x \in]a; b[\quad F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Les fonctions F et G sont n fois dérivables sur $]a; b[$ et un simple calcul donne leurs dérivées successives :

$$\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in]a; b[\quad \begin{cases} F^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) - \sum_{k=0}^{n-p} \frac{f^{(k+p)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ G^{(p)}(x) = \frac{(x-a)^{n+1-p}}{(n+1-p)!} \end{cases}$$

En particulier, $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \begin{cases} F^{(p)}(a) = f^{(p)}(a) - f^{(p)}(a) = 0 \\ G^{(p)}(a) = 0 \end{cases}$

Ces calculs étant faits, commençons la preuve proprement dite. F et G sont continues sur $]a; b[$, dérivables sur $]a; b[$ et G' ne s'annule pas sur $]a; b[$. D'après le **théorème des accroissements finis généralisé**, il existe $c_1 \in]a; b[$ tel que

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$

Comme F, G, F', G' s'annulent en a , on peut aussi écrire :

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)}$$

Les fonctions F' et G' sont continues sur $]a; b[$, dérivables sur $]a; b[$ et G'' ne s'annule pas sur $]a; b[$. D'après le **théorème des accroissements finis généralisé**, il existe $c_2 \in]a; c_1[$ tel que

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

Mais comme $F''(a) = G''(a) = 0$, on a aussi

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F''(c_2) - F''(a)}{G''(c_2) - G''(a)}$$

Et on continue. On trouve de proche-en-proche des réels $c_0 > c_1 > \dots > c_{n+1} > a$ tels que

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \dots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} = \frac{F^{(n+1)}(c_{n+1})}{G^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

Or, $\forall x \in]a; b[\quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \text{et} \quad G^{(n+1)}(x) = 1$

donc $\frac{F(b)}{G(b)} = f^{(n+1)}(c_{n+1})$

soit $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$ □

Corollaire 12.5.14 (Théorème de Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un voisinage de a . Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Preuve : Si $n = 0$, le résultat est clair. Si $n > 0$, f est a fortiori de classe \mathcal{C}^{n-1} sur un voisinage V de a , et dérivable n fois dans V . D'après le **théorème de Taylor**, si $x \in V$, il existe $c(x)$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!} (x-a)^n$$

donc

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

Or,

$$|a - c(x)| \leq |a - x|$$

donc $c(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} a$. Comme $f^{(n)}$ est continue en a ,

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Autrement dit,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \square$$

Corollaire 12.5.15 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n et $n + 1$ fois dérivable sur un voisinage V de a . On suppose $f^{(n+1)}$ bornée sur V , par un réel $M > 0$. Alors

$$\forall x \in V \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve : C'est une simple application du théorème de Taylor : si $x \in V$, il existe c entre a et x tel que

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \square$$

12.5.4 La méthode de Newton

La méthode de Newton propose un algorithme pour trouver numériquement les zéros d'une fonction. Elle est décrite et étudiée dans un DM.

12.6 Fonctions usuelles

Il s'agit dans ce paragraphe de définir proprement toutes les fonctions élémentaires utilisées en mathématiques. On admet seulement, pour l'instant, le théorème d'existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle :

Théorème 12.6.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f admet des primitives sur I . Deux primitives de f ont une différence constante.

Preuve : La preuve de l'existence sera faite dans le chapitre d'intégration. Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x) = G'(x)$$

donc
$$\forall x \in I \quad (F - G)'(x) = 0$$

Comme I est un intervalle, on sait que $F - G$ est constante sur I . □

12.6.1 La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est définie et continue sur \mathbb{R}^* , d'après les théorèmes généraux d'existence de limites. Mais elle est aussi dérivable sur cet intervalle d'après le théorème de dérivation d'un inverse et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* et est dérivable, on voit que f' est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f''(x) = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

On voit alors qu'on peut montrer, par une récurrence immédiate, que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Ceci permet de calculer en particulier le développement de Taylor de f au voisinage de 1, pour tout entier n :

$$\frac{1}{1-x} = f(1-x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (-x)^k + o(x^n)$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)}$$

Il est évidemment naturel de se demander si, pour un x fixé, ce développement converge vers $f(x)$. La réponse est positive si, et seulement si, $|x| < 1$: montrons-le. On se donne un réel x . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^n x^k \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}$$

La suite $(|x|^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si, et seulement si, $|x| < 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[\quad \frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k}$$

12.6.2 Le Logarithme Népérien

On a maintenant tous les outils pour définir l'une des fonctions usuelles fondamentales : le logarithme népérien. À l'aide du **Théorème 11.6.1**, on sait que

Définition 12.6.2

Il existe une unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur \mathbb{R}_+^* s'annulant en 1. Cette fonction est appelée logarithme népérien (ou tout simplement logarithme) et on la note \ln .

Cette définition est suffisante pour déduire toutes les propriétés connues du logarithme :

Théorème 12.6.3

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{et} \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(x^n) = n \ln x$
4. \ln est une fonction strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
6. \ln réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .
7. Soit f une fonction dérivable, strictement positive, sur un intervalle I . La fonction $\ln \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad (\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Preuve : On démontre chacune de ces propriétés.

1. Il s'agit simplement de la définition du logarithme : c'est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur \mathbb{R}_+^* donc sa dérivée est $x \mapsto 1/x$ et elle s'annule en 1.
2. On fixe un nombre strictement positif y et on définit la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \ln(xy) - \ln y$$

Alors g est dérivable sur I , comme composée de deux fonctions dérivables. Et on a, d'après le théorème de dérivation d'une composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = y \times \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$$

En outre,

$$g(1) = \ln y - \ln y = 0$$

Comme \ln est l'unique fonction satisfaisant ces deux propriétés,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = g(x) = \ln(xy) - \ln y$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Puisque y a été choisi arbitrairement, la première partie de la proposition est vérifiée.

On s'attaque à présent au calcul de $\ln(x/y)$. Pour cela, il suffit de constater que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \ln \left(\frac{x}{y} \times y \right) = \ln \frac{x}{y} + \ln y$$

d'où
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

3. La propriété 2 nous dit que le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de chacun des termes de ce produit. Puisque x^n est le produit de n termes égaux à x , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(x^n) = \underbrace{\ln x + \dots + \ln x}_{n \text{ fois}} = n \ln x$$

4. D'après la première propriété, la dérivée de \ln est la fonction $x \mapsto 1/x$, qui est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . Donc \ln est strictement croissante sur cet intervalle.
5. Puisque \ln est une fonction strictement croissante, on sait qu'elle admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. On constate alors que le logarithme n'est pas une fonction bornée puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln 2^n = n \ln 2$$

qui peut être rendu aussi grand que l'on veut en choisissant n de plus en plus grand. Par suite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Intéressons-nous maintenant à la limite en 0^+ . On a

$$\forall x > 0 \quad \ln x = \ln \frac{1}{1/x} = -\ln \frac{1}{x}$$

Or,
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$$

donc d'après le théorème de composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

6. D'après la propriété de croissance stricte du logarithme, et les valeurs de ses limites en 0^+ et en $+\infty$, elle réalise bien une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .
7. Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $\ln \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad (\ln \circ f)'(x) = f'(x) \ln'(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Comme pour la fonction inverse, il est toujours bon de s'intéresser à la régularité du logarithme :

Théorème 12.6.4

La fonction \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . De plus, pour tout entier n ,

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

et
$$\forall x \in [-1; 1[\quad \ln(1-x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

Preuve : Comme la dérivée de \ln sur \mathbb{R}_+^* est de classe \mathcal{C}^∞ , le logarithme est aussi infiniment dérivable. De plus, les calculs du paragraphe précédent montrent que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln^{(n)} x = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

Pour tout entier n , on peut utiliser le théorème de Taylor-Young au voisinage de 1 :

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} (-x)^k + o(x^n) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Enfin, on fixe $x \in]-1; 1[$ et un entier n non nul. On pose

$$\forall y \in [-|x|; |x|] \quad f(y) = \ln(1-y) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k}$$

f est dérivable sur $[-|x|; |x|]$ et l'on a

$$\forall y \in [-|x|; |x|] \quad f'(y) = -\frac{1}{1-y} + \sum_{k=1}^n y^{k-1} = -\frac{1}{1-y} + \sum_{k=0}^{n-1} y^k = -\frac{y^n}{1-y}$$

donc
$$\forall y \in [-|x|; |x|] \quad |f'(y)| = \frac{|y|^n}{1-y} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}$$

On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0; x]$ ou $[x; 0]$, suivant que x est positif ou négatif :

$$|f(x) - f(0)| \leq |x| \times \frac{|x|^n}{1-|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

On a montré
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

Mais comme $|x| < 1$, la suite $(|x|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. D'où

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \ln(1-x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

Mais ceci ne suffit pas à établir la convergence lorsque $x = -1$. Pour ce faire, on a besoin de l'inégalité de Taylor-Lagrange. On note $g : x \mapsto \ln(1-x)$, définie sur $[-1; 0]$ et infiniment dérivable. Si $k \in \mathbb{N}^*$ est donné, on sait que

$$\forall x \in [-1; 0] \quad g^{(k)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^k}$$

donc
$$\forall x \in [-1; 0] \quad |g^{(k)}(x)| \leq (k-1)!$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée sur $[-1; 0]$,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right| &= \left| g(-1) - \sum_{k=1}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \right| \\ &\leq \frac{|-1-0|}{(n+1)!} \sup_{x \in [-1; 0]} |g^{(n+1)}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 donc on a gagné. □

12.6.3 L'Exponentielle Népérienne

On vient de voir que le logarithme est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Cette fonction admet donc une réciproque, définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Définition 12.6.5

On appelle exponentielle népérienne (ou tout simplement exponentielle) la réciproque du logarithme sur \mathbb{R} . Il s'agit d'une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs strictement positives, notée \exp .

Théorème 12.6.6

1. $\exp 0 = 1$.
2. La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp' x = \exp x$$

3. La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$$

4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exp(x + y) = \exp x \times \exp y \quad \text{et} \quad \exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exp(nx) = (\exp x)^n$

Preuve :

1. On sait que $\ln 1 = 0$, d'après la définition du logarithme. Or, d'après la **Définition 1.3**, $\exp 0$ est l'unique solution de l'équation $\ln y = 0$. Par suite, $\exp 0 = 1$.
2. On invoque le **Théorème 1.5** : puisque \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée ne s'annule jamais sur cet intervalle, \exp est dérivable sur \mathbb{R} . En outre, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp' x = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{1/\exp x} = \exp x$$

3. Puisque la fonction \exp prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* , elle est strictement positive. Sa dérivée (qui est elle-même) est donc strictement positive et \exp est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, \exp admet une limite ℓ en $-\infty$ et une limite L en $+\infty$. D'après le théorème de composition des limites,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \ell \end{array} \right\} \text{ donc } \ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(\ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

De la même manière, on montre que $L = +\infty$.

4. Soient x et y deux nombres réels. Puisque \ln et \exp sont réciproques l'une de l'autre, en posant

$$x_0 = \exp x \quad \text{et} \quad y_0 = \exp y$$

on a
$$\ln x_0 = x \quad \text{et} \quad \ln y_0 = y$$

Alors
$$\exp(x + y) = \exp(\ln x_0 + \ln y_0) = \exp(\ln x_0 y_0) = x_0 y_0 = \exp x \times \exp y$$

ce qui établit la première propriété.

Pour la deuxième, d'après ce qu'on vient de démontrer,

$$\exp(x - y) \times \exp y = \exp(x - y + y) = \exp x$$

d'où
$$\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$$

5. On vient de voir que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles de chacun des termes de la somme. En particulier, si x est un réel et n un entier,

$$\exp(nx) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x\right) = \prod_{k=1}^n \exp x = (\exp x)^n \quad \square$$

Passons aux propriétés de régularité :

Théorème 12.6.7

exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . De plus, pour tout entier n ,

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

et
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Preuve : Le caractère \mathcal{C}^∞ est évident puisque \exp est dérivable et $\exp' = \exp$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp^{(n)} = \exp \quad \text{et} \quad \exp^{(n)}(0) = 1$$

Donc si $n \in \mathbb{N}$ est donné, le théorème de Taylor appliqué au voisinage de 0 donne

$$\exp x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

On montre maintenant que le développement de Taylor est convergent. Soient $x \in \mathbb{R}$, non nul et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall y \in [-|x|; |x|] \quad |\exp^{(n)}(y)| = \exp y \leq \exp |x|$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée sur $I = [0; x]$ ou $I = [x; 0]$, suivant que x est positif ou négatif,

$$\left| \exp x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|}{(n+1)!} \sup_{y \in I} |\exp^{(n)}(y)| \leq \frac{|x| \exp(|x|)}{(n+1)!}$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, tout est bel et bon. □

12.6.4 Logarithmes et Exponentielles de Base a

Dans toute cette section, on se donne un nombre réel $a > 0$ différent de 1.

Définition 12.6.8

La fonction logarithme de base a , notée \log_a , est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Cette fonction \log_a est proportionnelle au logarithme népérien, donc elle possède les mêmes propriétés à une différence près :

Théorème 12.6.9

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log'_a x = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \log_a(x^n) = n \log_a x$
4. \log_a est une fonction strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$
6. \log_a réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

Preuve : Toutes les propriétés sont des conséquences directes des propriétés correspondantes pour le logarithme, sauf la 4^{ème} sur le sens de variation de \log_a .

Comme le logarithme est strictement croissant et que $\ln 1 = 0$, il vient

$$\begin{cases} \ln a > 0 & \text{si } a > 1 \\ \ln a < 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

Par conséquent $\begin{cases} \log_a \text{ croît} & \text{si } a > 1 \\ \log_a \text{ décroît} & \text{si } a < 1 \end{cases} \quad \square$

Nous allons voir que le logarithme de base a d'un nombre x est la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir x . Mais on ne sait pas encore ce que signifient a^π ou $a^{\sqrt{2}}$. Pour définir ces nouvelles opérations, on étudie les bijections réciproques des fonctions \log_a .

Définition 12.6.10

On appelle exponentielle de base a la bijection réciproque de \log_a . Il s'agit de l'unique fonction, notée \exp_a , définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a(\exp_a x) = x$$

Théorème 12.6.11

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a x = \exp(x \ln a)$
2. $\exp_a 0 = 1 \quad \text{et} \quad \exp_a 1 = a$
3. La fonction \exp_a est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'_a x = \ln a \times \exp_a x$$

4. Si $a > 1$ (resp. $a < 1$), la fonction \exp_a est strictement croissante (resp. décroissante) sur \mathbb{R} .
En outre,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a x = +\infty \text{ (resp. } 0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a x = 0 \text{ (resp. } +\infty)$$

5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x + y) = \exp_a x \times \exp_a y \quad \text{et} \quad \exp_a(x - y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y}$

$$6. \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exp_a(nx) = (\exp_a x)^n$$

Preuve : Une fois le premier résultat établi, tous les autres en seront des conséquences directes, avec l'aide du **Théorème 2.4** et des théorèmes de manipulations de limites.

Ainsi, soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les **Définition 2.3** et **2.1**,

$$x = \log_a(\exp_a x) = \frac{\ln \exp_a x}{\ln a}$$

d'où $\ln \exp_a x = x \ln a$

et $\exp_a x = \exp(x \ln a)$ □

On constate alors, à l'aide des propriétés 2 et 6 que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp_a n = (\exp_a 1)^n = a^n$$

C'est-à-dire que \exp_a est définie sur tout \mathbb{R} et prend pour valeur aux entiers les puissances entières correspondantes de a . Il est donc naturel de définir

Définition 12.6.12

Pour tout réel x , on définit a à la puissance x , noté a^x , comme étant le nombre

$$a^x = \exp_a x = \exp(x \ln a)$$

Si $a = 1$, on pose $a^x = 1$ pour tout réel x . On note $e = \exp 1$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x = e^x$$

Avec cette nouvelle notation, on garde les propriétés usuelles des puissances entières et on les généralise :

Théorème 12.6.13

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad \text{et} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Preuve : Les deux premières propositions ne sont que des récritures de la propriété 5 dans le **Théorème 2.8**, en remplaçant $\exp_a z$ par a^z . Pour la troisième, on prend x et y réels et on a, en déroulant les diverses définitions vues jusqu'à présent :

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= \exp_{a^x} y = \exp(y \ln a^x) = \exp(y \ln \exp_a x) \\ &= \exp(y \ln \exp(x \ln a)) = \exp(xy \ln a) = \exp_a y \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$
□

À ce stade, en partant uniquement de la fonction $x \mapsto 1/x$ dont on a étudié une primitive \ln , on a créé déjà un bon nombre de fonctions fondamentales en analyse et on a généralisé la notion de puissance.

Il nous reste à voir comment ces fonctions se comparent entre elles aux bornes de leurs ensembles de définition.

12.6.5 Croissances Comparées

Tout commence avec le lemme suivant :

Lemme 12.6.14

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

Preuve : Évidemment, cette limite ne s'étudie pas directement à l'aide des théorèmes de manipulation de limites, puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

On ruse en remarquant que

$$\forall x > 1 \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Par suite $\forall x > 1 \quad 0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$

et $\forall x > 1 \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème des gendarmes pour conclure. □

Les théorèmes de croissances comparées découlent alors tous de ce lemme :

Théorème 12.6.15

Soient α et β deux nombres réels strictement positifs.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \exp(\beta x) = 0$

Remarquons qu'il n'y a pas lieu de s'inquiéter outre mesure de ces valeurs absolues dans les formules 2 et 4. Elles sont juste là car $\ln^\alpha x$ n'a aucun sens lorsque $x < 1$, dans la mesure où $\ln x$ est négatif. En effet, par définition,

$$\ln^\alpha x = \exp(\alpha \ln \ln x)$$

En revanche, $|\ln x|^\alpha$ n'a aucun problème de définition.

De la même manière, x^α ne veut rien dire lorsque $x < 0$.

Preuve :

1. On s’amuse simplement avec les propriétés du logarithme et des puissances :

$$\forall x > 1 \quad \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha$$

Or, $\forall x > 1 \quad x = (x^{\beta/\alpha})^{\alpha/\beta}$

d’où $\forall x > 1 \quad \ln x = \frac{\alpha}{\beta} \ln x^{\beta/\alpha}$

et $\forall x > 1 \quad \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\ln x^{\beta/\alpha}}{x^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha$

Il ne reste plus qu’à appliquer le théorème de composition des limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\beta/\alpha} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{\beta/\alpha}}{x^{\beta/\alpha}} = 0^+$$

ce qui est suffisant pour conclure.

2. Une première manipulation s’impose, pour ramener l’étude en 0^+ en une étude en $+\infty$:

$$\forall x \in]0; 1[\quad x^\beta |\ln x|^\alpha = \left(\frac{1}{1/x} \right)^\beta \left| \ln \frac{1}{1/x} \right|^\alpha = \frac{\ln^\alpha 1/x}{(1/x)^\beta}$$

Puis on applique le théorème de composition des limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

3. Encore le théorème de composition des limites, avec la propriété 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha(\exp x)}{(\exp x)^\beta} = 0$$

On applique alors les propriétés algébriques du log et de l’exponentielle pour conclure.

4. À nouveau le théorème de composition des limites, avec la propriété 3 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp \beta x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^\alpha}{\exp(-\beta x)} = 0$$

On conclue avec les propriétés algébriques de l’exponentielle et le fait que lorsque x est négatif, on a $(-x) = |x|$. □

12.6.6 L'exponentielle Complexe

La fonction exponentielle a parfaitement été définie sur \mathbb{R} . On va maintenant tenter de la prolonger à \mathbb{C} . On définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad s_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

On sait déjà (**théorème 6.7**) que pour tout réel x , la suite $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\exp x$.

Proposition 12.6.16

Pour tout nombre complexe z , la suite $(s_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}$. On montre que $(s_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. On sait que $(s_n(|z|))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisqu'elle converge vers $\exp(|z|)$. Donc si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad |s_n(|z|) - s_{n+p}(|z|)| \leq \varepsilon$$

Mais $\forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad |s_n(z) - s_{n+p}(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|z|^k}{k!} = s_{n+p}(|z|) - s_n(|z|) \leq \varepsilon$

Donc $(s_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy : elle converge. □

Définition 12.6.17 (Exponentielle complexe)

Si $z \in \mathbb{C}$, la limite de la suite $(s_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *exponentielle complexe de z* et notée $\exp z$.

Proposition 12.6.18 (Propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe)

L'exponentielle complexe possède les propriétés suivantes :

1. Elle ne s'annule pas sur \mathbb{C} .
2. $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp z \exp w \quad \text{et} \quad \exp(z-w) = \frac{\exp z}{\exp w}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp \bar{z} = \overline{\exp z}$
4. $\forall x \in \mathbb{C} \quad \overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) = \frac{1}{\exp(ix)} \quad \text{et} \quad |\exp(ix)| = 1$

Preuve : Soient z et w deux nombres complexes. Par définition,

$$\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) \quad \exp w = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(w) \quad \text{et} \quad \exp(z+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z+w)$$

Fixons un entier n non nul et calculons $s_{2n}(z+w)$:

$$s_{2n}(z+w) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^k \frac{z^\ell w^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!}$$

On commence par inverser les sommes :

$$s_{2n}(z+w) = \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{k=\ell}^{2n} \frac{z^\ell w^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!}$$

et on effectue le changement d'indice $k \leftarrow k - \ell$ dans la somme intérieure :

$$s_{2n}(z+w) = \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-\ell} \frac{z^\ell w^k}{\ell!k!}$$

Puis on fait une séparation astucieuse de sommes, pour faire apparaître $s_n(z) s_n(w)$:

$$\begin{aligned} s_{2n}(z+w) &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{z^\ell w^k}{\ell! k!} + \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=n+1}^{2n-\ell} \frac{z^\ell w^k}{\ell! k!} + \sum_{\ell=n+1}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-\ell} \frac{z^\ell w^k}{\ell! k!} \\ &= s_n(z) s_n(w) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{z^\ell}{\ell!} (s_{2n-\ell}(w) - s_n(w)) + \sum_{\ell=n+1}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-\ell} \frac{z^\ell w^k}{\ell! k!} \end{aligned}$$

On termine par un dernier échange de sommes :

$$\begin{aligned} s_{2n}(z+w) - s_n(z) s_n(w) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{z^\ell}{\ell!} (s_{2n-\ell}(w) - s_n(w)) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=n+1}^{2n-k} \frac{z^\ell w^k}{\ell! k!} \\ &= + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{z^\ell}{\ell!} (s_{2n-\ell}(w) - s_n(w)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w^k}{k!} (s_{2n-k}(z) - s_n(z)) \end{aligned}$$

Voilà... Ces calculs sont vrais pour tout n . On fixe un $\varepsilon > 0$; comme les suites $s(z)$ et $s(w)$ sont de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, p \geq N \quad |s_n(z) - s_p(z)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |s_n(w) - s_p(w)| \leq \varepsilon$$

On prend alors $n \geq N$, quelconque. On remarque alors que si $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, alors $2n-\ell \geq n+1 \geq N$. D'où

$$\forall \ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad |s_{2n-\ell}(z) - s_n(z)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |s_{2n-\ell}(w) - s_n(w)| \leq \varepsilon$$

D'où

$$\begin{aligned} |s_{2n}(z+w) - s_n(z) s_n(w)| &\leq \varepsilon \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{|z|^\ell}{\ell!} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|w|^k}{k!} \\ &\leq \varepsilon (\exp(|z|) + \exp(|w|)) \end{aligned}$$

Cette majoration est vraie pour tout $n \geq N$. Donc on peut passer à la limite (on sait que les suites de gauche convergent) pour obtenir :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\exp(z+w) - \exp z \exp w| \leq \varepsilon (\exp(|z|) + \exp(|w|))$$

d'où
$$\exp(z+w) = \exp z \exp w$$

Ce résultat est vrai pour tous z et w dans \mathbb{C} . Donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp z \exp(-z) = \exp 0 = 1$$

Donc \exp ne s'annule pas, et $\exp(-z)$ est l'inverse de $\exp z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Maintenant, prenons un nombre complexe z . Pour tout entier n ,

$$s_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} = \overline{s_n(z)}$$

donc
$$\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$$

En particulier, si x est un nombre réel,

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) = \frac{1}{\exp(ix)} \quad \text{d'où} \quad |\exp(ix)|^2 = 1 \quad \square$$

Corollaire 12.6.19 (Dérivation d'une exponentielle complexe)

1. La fonction $f : x \mapsto \exp(ix)$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = if$.

2. Soit g une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs complexes, dérivable. Alors $\exp g$ est dérivable sur I et $(\exp g)' = g' \exp g$.

Preuve : Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad s_n(ih) = \sum_{k=0}^n \frac{(ih)^k}{k!} = 1 + ih + \sum_{k=2}^n \frac{(ih)^k}{k!}$$

donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \left| \frac{s_n(ih) - 1}{h} - i \right| \leq \sum_{k=2}^n \frac{|h|^{k-1}}{k!} = \frac{s_n(|h|) - 1}{|h|} - 1$$

Comme les deux membres sont les termes généraux de suites convergentes, on passe à la limite pour obtenir

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\exp(ih) - 1}{h} - i \right| \leq \left| \frac{\exp(|h|) - 1}{h} - 1 \right|$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0, car l'exponentielle réelle est dérivable en 0. Donc la limite de gauche est nulle et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(ih) - 1}{h} = i$$

Maintenant, on fixe un $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\exp(i(x+h)) - \exp ix}{h} = \exp(ix) \frac{\exp(ih) - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} i \exp(ix)$$

Ce qui montre que f est dérivable en x et $f'(x) = if(x)$.

La deuxième partie est un simple calcul : si g est à valeurs complexes, on note g_1 sa partie réelle et g_2 sa partie imaginaire. Alors

$$\exp g = \exp(g_1 + ig_2) = \exp g_1 \times \underbrace{\exp(ig_2)}_{=f \circ g_2}$$

D'après les théorèmes généraux, $\exp g$ est dérivable sur I et on utilise les formules de dérivation de produits et de composées. □

12.6.7 Les fonctions circulaires et le nombre π

Définition 12.6.20 (Fonctions cosinus et sinus)

On appelle *fonctions cosinus et sinus* les fonctions définies par

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

Théorème 12.6.21

Les fonctions sinus et cosinus satisfont les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix))$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$
3. *cos est impaire et sin est paire.*
4. *sin et cos sont infiniment dérivables sur \mathbb{R} et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \sin' x = \cos x \\ \cos' x = -\sin x \end{cases}$$

$$5. \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases}$$

$$6. \forall z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \cos z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ \sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{cases}$$

$$7. \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{cases}$$

Preuve : L'essentiel du travail a été fait dans le **corollaire 6.19**.

1. La première proposition est une conséquence du fait que $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

2. Si $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos(-z) = \frac{\exp(-iz) + \exp(iz)}{2} = \cos z$$

et
$$\sin(-z) = \frac{\exp(-iz) - \exp(iz)}{2i} = -\sin z$$

3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = \exp(iz) \exp(-iz) = 1$

4. Comme $x \mapsto \exp(ix)$ est infiniment dérivable sur \mathbb{R} , on sait que \cos et \sin le sont aussi d'après les théorèmes généraux. Aussi, d'après les formules de dérivation d'une composée,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos' x = \frac{i \exp(ix) - i \exp(-ix)}{2} = -\sin x$$

et de la même manière, $\sin' = \cos$.

5. Les formules d'addition sont également triviales : si a et b sont des complexes,

$$\begin{aligned} \exp(i(a+b)) &= \exp(ia) \exp(ib) = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) \end{aligned}$$

et de même $\exp(-i(a+b)) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) - i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$

D'où
$$\cos(a+b) = \frac{\exp(i(a+b)) + \exp(i(a-b))}{2} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et
$$\sin(a+b) = \frac{\exp(i(a+b)) - \exp(i(a-b))}{2} = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

6. Si $z \in \mathbb{C}$, on sait que $(s_n(iz))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n(-iz))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\exp(iz)$ et $\exp(-iz)$ respectivement. Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la limite de la suite donc

$$\cos z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2n}(iz) + s_{2n}(-iz)}{2} \quad \sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2n+1}(iz) - s_{2n+1}(-iz)}{2i}$$

Mais pour tout entier n , en séparant les termes de rangs pair et impair dans $s_{2n}(z)$, on trouve

$$\begin{aligned} s_{2n}(iz) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{i^k z^k}{k!} = \sum_{p=0}^n \frac{i^{2p} z^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{i^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

et

$$s_{2n}(-iz) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} - i \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Donc

$$\frac{s_{2n}(iz) + s_{2n}(-iz)}{2} = \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!}$$

ce qui donne la première formule en passant à la limite. La deuxième formule s'obtient de la même manière.

7. On commence par observer que

$$\cos 0 = \frac{\exp 0 + \exp 0}{2} = 1 \quad \sin 0 = \frac{\exp 0 - \exp 0}{2i} = 0$$

Soit n un entier. On sait que \cos est $2n + 1$ fois dérivable au voisinage de 0. Le calcul des dérivées de \cos et \sin permet de montrer, par une récurrence immédiate, que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \cos^{(2p)} 0 = (-1)^p \quad \cos^{(2p+1)} 0 = 0$$

Le théorème de Taylor-Young donne alors à l'ordre $2n + 1$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\cos^{(k)} 0}{k!} x^k + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

Pour le sinus, c'est la même chose. □

Lemme 12.6.22

Le sinus est strictement positif sur $[0; 2]$.

Preuve : Soit $x \in [0; 2]$. On sait que

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On pose $\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

et l'on a $\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k - u_{k+1} = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} = \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!} ((2k+3)(2k+2) - x^2)$

$$\geq \frac{x^{2k+1}}{(2k+3)!} (6 - x^2) \geq 0$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^n u_{2k} - \sum_{k=0}^n u_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \underbrace{(u_{2k} - u_{2k+1})}_{>0} \geq u_0 - u_1$$

En passant à la limite, $\forall x \in [0; 2]$ $\sin x \geq u_0 - u_1 > 0$ □

Lemme 12.6.23

La fonction cosinus s'annule une et une seule fois sur $[0; 2]$.

Preuve : D'après le **lemme 6.22** et parce que $\cos' = -\sin$, la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; 2]$. De plus, $\cos 0 = 1$; comme \cos est continue, il suffit de montrer que $\cos 2 < 0$. On sait que

$$\cos 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_k = \frac{2^{2k}}{(2k)!}$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_k - u_{k+1} = \frac{2^{2k}}{(2k)!} - \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k}}{(2k+2)!} ((2k+2)(2k+1) - 4)$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$ $u_k - u_{k+1} > 0$

Par suite, $\forall n \geq 3$
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k &= u_0 - u_1 + u_2 + \sum_{k=2}^n u_{2k} - \sum_{k=3}^n u_{2k-1} \\ &= 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} + \sum_{k=2}^n \underbrace{(u_{2k} - u_{2k-1})}_{\leq 0} \\ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k &\leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

En passant à la limite, il vient $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$. □

Définition 12.6.24 (Le nombre π)

Soit α l'unique élément de $[0; 2]$ tel que $\cos \alpha = 0$. Le réel $2\alpha \in [0; 4]$ est noté π .

Ainsi, par définition, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et \cos est strictement positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. On peut alors en déduire de nombreuses valeurs des fonctions sinus et cosinus. Commençons par

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{donc} \quad \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$$

Mais on a montré que le sinus est strictement positif sur $[0; 2]$ donc $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Ensuite, à l'aide des formules d'addition,

$$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

et $\cos \pi = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$

Par suite, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin(z + \pi) &= \sin z \cos \pi + \cos z \sin \pi = -\sin z \\ \sin(\pi - z) &= \sin \pi \cos z - \sin z \cos \pi = \sin z \\ \cos(z + \pi) &= \cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi = -\cos z \\ \cos(\pi - z) &= \cos z \cos \pi + \sin z \sin \pi = -\cos z \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \sin \frac{\pi}{2} \cos z - \cos \frac{\pi}{2} \sin z = \cos z \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) &= \sin \frac{\pi}{2} \cos z + \cos \frac{\pi}{2} \sin z = \cos z \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right) = \sin z \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + z\right) = \sin(\pi + z) = -\sin z \\ \sin(2\pi + z) &= \sin(\pi + \pi + z) = -\sin(\pi + z) = \sin z \\ \cos(2\pi + z) &= \cos(\pi + \pi + z) = -\cos(\pi + z) = \cos z \\ \sin(2\pi - z) &= \sin(-z) = -\sin z \\ \cos(2\pi - z) &= \cos(-z) = \cos z \end{aligned}$$

Théorème 12.6.25 (Irrationalité de π)

π est irrationnel.

Preuve : Fait en DM. □

On s'intéresse maintenant à la périodicité de ces fonctions. On aura besoin d'un

Lemme 12.6.26

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, périodique, non constante. Alors il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble des périodes de f soit $T\mathbb{Z}$.

Preuve : Notons \mathcal{P} l'ensemble des périodes de f . Si p et q sont des périodes de f ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+p) = f(x) \quad \text{et} \quad f(x+q) = f(x)$$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+p+q) = f(x+p) = f(x)$

Donc $p+q$ est une période. En outre,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x-p) = f(x-p+p) = f(x)$$

et $-p$ est une période. \mathcal{P} est donc un sous-groupe de \mathbb{R} .

Supposons que \mathcal{P} est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \eta > 0 \quad \exists p \in \mathcal{P} \quad |x-p| \leq \eta$$

On fixe un $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue en 0 donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\eta; \eta] \quad |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}$; par densité de \mathcal{P} , il existe une période p de f , telle que $|x-p| \leq \eta$. Donc

$$|f(x) - f(0)| = |f(x-p) - f(0)| \leq \varepsilon$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc $f(x) = f(0)$ et f est constante : c'est une contradiction. On a alors vu en DM qu'il existe $T > 0$, tel que $\mathcal{P} = T\mathbb{Z}$. □

Théorème 12.6.27 (Périodicité et variations)

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le cosinus est une bijection de $[k\pi; (k+1)\pi]$ sur $[-1; 1]$. Elle est strictement croissante sur cet intervalle si, et seulement si, k est pair.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le sinus est une bijection de $[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]$ sur $[-1; 1]$. Elle est strictement croissante sur cet intervalle si, et seulement si, k est pair.
3. Soient a et b dans \mathbb{R} . On a

$$\cos a = \cos b \iff (a = b + 2\pi \text{ ou } a = -b + 2\pi)$$

et
$$\sin a = \sin b \iff (a = b + 2\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2\pi)$$

4. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. Toute période de sinus ou cosinus est un multiple entier relatif de 2π .

Preuve : La 2π -périodicité vient d'une des formules prouvées précédemment.

On sait que sin est strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ d'après le **lemme 6.22** et parce que $0 \leq \frac{\pi}{2} \leq 2$. De plus,

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right[\quad \sin x = \sin(\pi - x) > 0 \quad \text{car} \quad \pi - x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

Par suite, cos est strictement décroissante sur $[0; \pi]$. Comme elle est continue, le **corollaire 4.9** dit

$$\cos([0; \pi]) = [\cos \pi; \cos 0] = [-1; 1]$$

cos est donc une bijection strictement décroissante de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. Alors si $k \in \mathbb{Z}$, la formule

$$\forall x \in [k\pi; (k+1)\pi] \quad \cos x = \cos(x - k\pi + k\pi) = (-1)^k \cos(x - k\pi)$$

montre que cos est une bijection de $[k\pi; (k+1)\pi]$ sur $[-1; 1]$, décroissante si et seulement si k est pair.

On sait alors que cos est strictement croissante sur $[-\pi; 0]$. Donc

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right] \quad \cos x > \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Et on sait déjà que cos est strictement positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, par définition de π . Ainsi, cos est strictement positive sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et sin est strictement croissante sur cet intervalle. Puisqu'elle est continue, le **corollaire 4.9** donne

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1; 1]$$

Par suite, sin est une bijection strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. Si $k \in \mathbb{Z}$ est donné, la formule

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right] \quad \sin x = \sin(x - k\pi + k\pi) = (-1)^k \sin(x - k\pi)$$

prouve que sin est une bijection de $[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]$ sur $[-1; 1]$, strictement croissante si et seulement si k est pair.

Donnons-nous deux réels a et b , tels que $\cos a = \cos b$, avec par exemple $a \leq b$. On note k la partie entière de $\frac{a}{2\pi}$, de sorte que

$$k \leq \frac{a}{2\pi} < k+1 \quad \text{ou encore} \quad a \in [2k\pi; 2(k+1)\pi[$$

On pose aussi
$$\ell = \left\lfloor \frac{b}{2\pi} \right\rfloor \quad \text{et l'on a} \quad b \in [2\ell\pi; 2(\ell+1)\pi[$$

Supposons d'abord que $k = \ell = 0$. Si a et b sont dans $[0; \pi[$, par injectivité de \cos sur cet intervalle, on a $a = b$. S'ils sont dans $[\pi; 2\pi[$, c'est la même chose. Et si $a \in [0; \pi[$ et $b \in [\pi; 2\pi[$, on obtient $2\pi - b \in [0; \pi[$ donc $a = 2\pi - b$.

Si k ou ℓ n'est pas nul, on a

$$\cos(a - 2k\pi) = \cos a = \cos b = \cos(b - 2\ell\pi)$$

donc $a - 2k\pi = b - 2\ell\pi$ ou $a - 2k\pi = 2\pi - b + 2\ell\pi$

Dans tous les cas, $a = b [2\pi]$ ou $a = -b [2\pi]$

Supposons maintenant que $\sin a = \sin b$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a = \sin b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

et $\frac{\pi}{2} - a = \frac{\pi}{2} - b [2\pi]$ ou $\frac{\pi}{2} - a = b - \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Finalement, $a = b [2\pi]$ ou $a = \pi - b [2\pi]$

On termine en étudiant les périodes de ces fonctions. On commence par remarquer qu'un réel $T > 0$ est une période du cosinus si, et seulement si, il est une période du sinus. En effet, d'après les formules de dérivation, si T est une période du cosinus, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x + T) = \cos'(x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\sin(x + T) = -\sin x$

et T est une période du sinus. La réciproque fonctionne de la même manière. Il suffit donc de trouver les périodes de \cos .

Comme \cos n'est pas nulle, le **lemme 6.26** montre qu'il existe $T > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $2\pi = nT$. Remarquons que $\cos T = 1$; mais les seules solutions de cette équation dans $[0; 2\pi]$ sont 0 et 2π , d'après ce qui précède. Donc $T = 2\pi$. □

Corollaire 12.6.28

Soient a et b deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta_0 \in [0; 2\pi[$ tel que $a = \cos \theta_0$ et $b = \sin \theta_0$.

Preuve : On suppose, par exemple, que $a, b \geq 0$. On sait que $a^2 + b^2 = 1$ donc $a, b \in [-1; 1]$. Il existe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $b = \sin \theta_0$. On a alors

$$a^2 = 1 - b^2 = 1 - \sin^2 \theta_0 = \cos^2 \theta_0$$

donc $\cos \theta_0 = \pm a$

Comme $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on sait que $\cos \theta_0 \geq 0$ donc $\cos \theta_0 = a$.

Montrons l'unicité. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$ tel que $\cos \theta = a$ et $\sin \theta = b$. Puisque $b = \sin \theta \geq 0$, on doit avoir $\theta \in [0; \pi]$. De ce fait, $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \pi - \theta_0$. Mais dans le deuxième cas, on a $\cos \theta = -\cos \theta_0 = -a$, ce qui est absurde.

Dans le cas où $a \geq 0$ et $b \leq 0$. Alors $-b \geq 0$ donc il existe un unique $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$a = \cos \theta \quad \text{et} \quad -b = \sin \theta$$

d'où $a = \cos(2\pi - \theta)$ et $b = -\sin \theta = \sin(2\pi - \theta)$

En prenant $\theta_0 = 2\pi - \theta$, on a montré l'existence. Pour l'unicité, on voit que si θ_1 est tel que $\cos \theta_1 = a$ et $\sin \theta_1 = b$, alors

$$a = \cos \theta_1 = \cos(2\pi - \theta_1) \quad \text{et} \quad -b = -\sin \theta_1 = \sin(2\pi - \theta_1)$$

Mais θ est l'unique élément de $[0; 2\pi[$ avec cette propriété donc

$$2\pi - \theta_1 = \theta \quad \text{et} \quad \theta_1 = 2\pi - \theta = \theta_0$$

Les deux autres cas se traitent de la même manière. □

On termine en calculant les dernières valeurs remarquables de \cos et \sin , pour pouvoir tracer leurs graphes. On sait que $\cos \frac{\pi}{4} \geq 0$ car \cos est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$; et l'on a

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1 \quad \text{d'où} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ensuite, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Puis $0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$

et $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$

d'où $\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$

Mais $\frac{\pi}{6} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et \cos ne s'annule pas dans cet intervalle. D'où

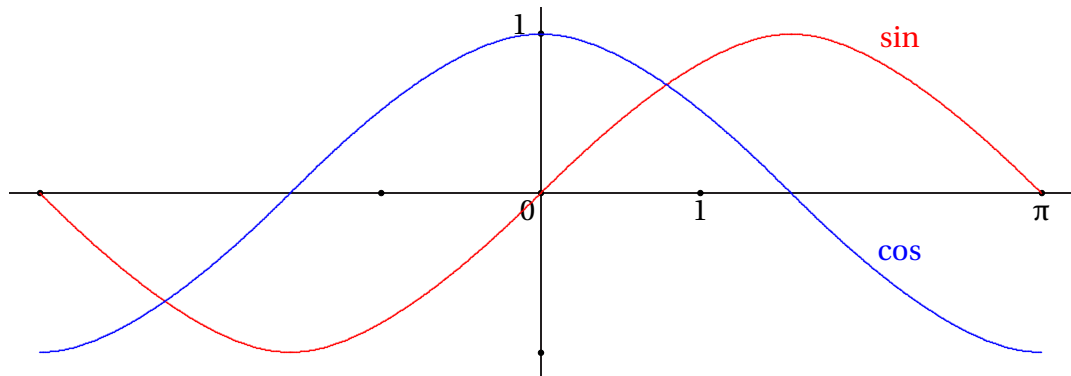
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Ensuite, $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$ donc $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

car le sinus est positif sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Enfin,

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



12.6.8 Fonctions circulaires réciproques

La Fonction Arcsinus

La fonction sinus n'est clairement pas une bijection sur $[-1; 1]$: en effet, elle est 2π -périodique donc toute valeur entre -1 et 1 a une infinité d'antécédents par la fonction sinus.

Mais on peut essayer de se restreindre à un intervalle le plus gros et le plus simple possible, sur lequel le sinus est bijectif. Ainsi, on constate que \sin est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, donc bijective sur $[-1; 1]$. Au-delà de $\frac{\pi}{2}$, certaines valeurs sont atteintes une deuxième fois. De même avant $-\frac{\pi}{2}$. On définit donc :

Définition 12.6.29

La fonction Arcsinus, notée \arcsin , est la bijection réciproque de la fonction \sin restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Théorème 12.6.30

\arcsin est une fonction impaire, définie sur $[-1; 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Elle est caractérisée par la propriété fondamentale

$$\forall x \in [-1; 1] \quad \sin \arcsin x = x$$

De plus $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin \sin x = x$

Preuve : Seul le fait que \arcsin est impaire est à établir : les autres propriétés découlent de la définition d'une bijection. Soit $x \in [-1; 1]$; $\arcsin(-x)$ est l'unique solution dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ de l'équation d'inconnue y :

$$\sin y = -x \tag{E}$$

Or $\sin(-\arcsin x) = -\sin \arcsin x = -x$

car la fonction sinus est impaire. Donc $-\arcsin x$ est solution de l'équation (E) et est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il vient $-\arcsin x = \arcsin(-x)$. □

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de dérivabilité de cette nouvelle fonction.

Théorème 12.6.31

1. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$

2. La fonction \arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ et

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. La fonction \arcsin est strictement croissante sur $[-1; 1]$.

Preuve :

1. Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. On sait que

$$\cos^2 \arcsin x + \underbrace{\sin^2 \arcsin x}_{=x^2} = 1$$

d'où $\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$ ou $-\sqrt{1-x^2}$

Pour déterminer s'il s'agit de $\sqrt{1-x^2}$ ou $-\sqrt{1-x^2}$, on réfléchit une minute : $\arcsin x$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\cos \arcsin x$ est positif. D'où

$$\forall x \in [-1; 1] \quad \cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$$

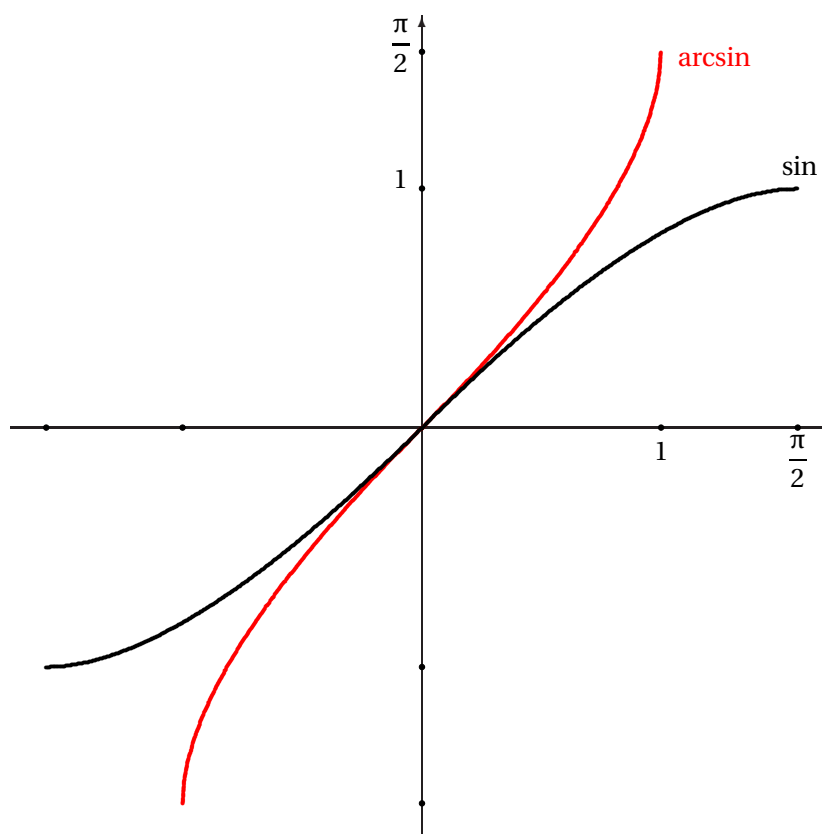
2. D'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, comme la dérivée de \sin est \cos , qui ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et comme \sin est bijective de cet intervalle sur $] -1; 1[$, sa réciproque \arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$. La valeur de sa dérivée est donnée par ce même théorème :

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sin' \arcsin x} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Ce point est clair puisque \arcsin' est strictement positive sur $] -1; 1[$. □

On termine en donnant quelques valeurs de \arcsin et en traçant son graphe :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Il est important de se rappeler l'énoncé exact de la propriété

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin \sin x = x$$

établie au **Théorème 3.2**. Elle dit bien que x doit se trouver compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ pour que

la formule $\arcsin \sin x = x$ soit valable. Et pas autre part!!!

Par exemple, $\arcsin \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ mais $\arcsin \sin \frac{2\pi}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

La Fonction Arccosinus

On se permet d’aller beaucoup plus vite dans cette section, dans la mesure où le travail est très similaire à celui effectué dans la précédente.

Définition 12.6.32

La fonction Arccosinus, notée \arccos , est la bijection réciproque de la fonction \cos restreinte à $[0; \pi]$.

Théorème 12.6.33

\arccos est une fonction définie sur $[-1; 1]$ à valeurs dans $[0; \pi]$. Elle est caractérisée par la propriété fondamentale

$$\forall x \in [-1; 1] \quad \cos \arccos x = x$$

En outre

$$\forall x \in [0; \pi] \quad \arccos \cos x = x$$

Enfin,

$$\forall x \in [-1; 1] \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

Preuve : Seule la dernière assertion n’est pas une conséquence directe des **Définition 1.3** et **Théorème 1.4**. On rappelle que $\arccos(-x)$ est l’unique solution $y \in [0; \pi]$ de l’équation

$$\cos y = -x$$

Or,

$$\pi - x \in [0; \pi] \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -x$$

Par conséquent,

$$\arccos(-x) = \pi - x \quad \square$$

Remarquons que cette dernière propriété nous assure que le graphe de la fonction \arccos est symétrique par rapport au point $A = (0, \frac{\pi}{2})$.

En effet, notons $M = (x, \arccos x)$ et $N = (-x, \arccos(-x))$ pour un $x \in [-1; 1]$. D’après le **Théorème 3.5**, on a en fait $N = (-x, \pi - \arccos x)$. On constate alors que

$$\overrightarrow{AM} = (x, \arccos x) - \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(x, \arccos x - \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\overrightarrow{NA} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) - (-x, \pi - \arccos x) = \left(x, \arccos x - \frac{\pi}{2}\right)$$

d’où

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NA}$$

Cette relation vectorielle exprime bien que les points M et N sont symétriques par rapport à A . On constatera cette symétrie lorsqu’on donnera le graphe de \arccos .

Comme pour la fonction \arcsin , on s’intéresse à la dérivabilité de \arccos .

Théorème 12.6.34

- $\forall x \in [-1; 1] \quad \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$
- La fonction \arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction \arccos est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.
- $\forall x \in [-1, 1] \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Preuve :

- On fixe x dans $[-1; 1]$. On sait que

$$\underbrace{\cos^2 \arccos x}_{=x^2} + \sin^2 \arccos x = 1$$

$$\text{d'où} \quad \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{1-x^2}$$

Or, $\arccos x$ est compris entre 0 et π donc $\sin \arccos x$ est positif et la conclusion s'ensuit.

- La fonction \cos est dérivable sur $]0; \pi[$, réalise une bijection de cet intervalle sur $] -1; 1[$ et sa dérivée $-\sin$ ne s'y annule pas. D'après le **Théorème 1.5**, \arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \arccos' x = \frac{1}{\cos' \arccos x} = \frac{1}{-\sin \arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La décroissance de \arccos est immédiate, compte tenu du fait que la dérivée est strictement négative sur $] -1; 1[$.
- On constate, à la lumière des calculs de \arccos' et \arcsin' , que

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \arccos' x = -\arcsin' x$$

$$\text{Autrement dit} \quad \forall x \in] -1; 1[\quad (\arccos + \arcsin)'(x) = 0$$

Et la fonction $\arccos + \arcsin$ est constante sur $] -1; 1[$. Cette constante peut être obtenue en évaluant en n'importe quel point de l'intervalle $] -1; 1[$. Par exemple :

$$\arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

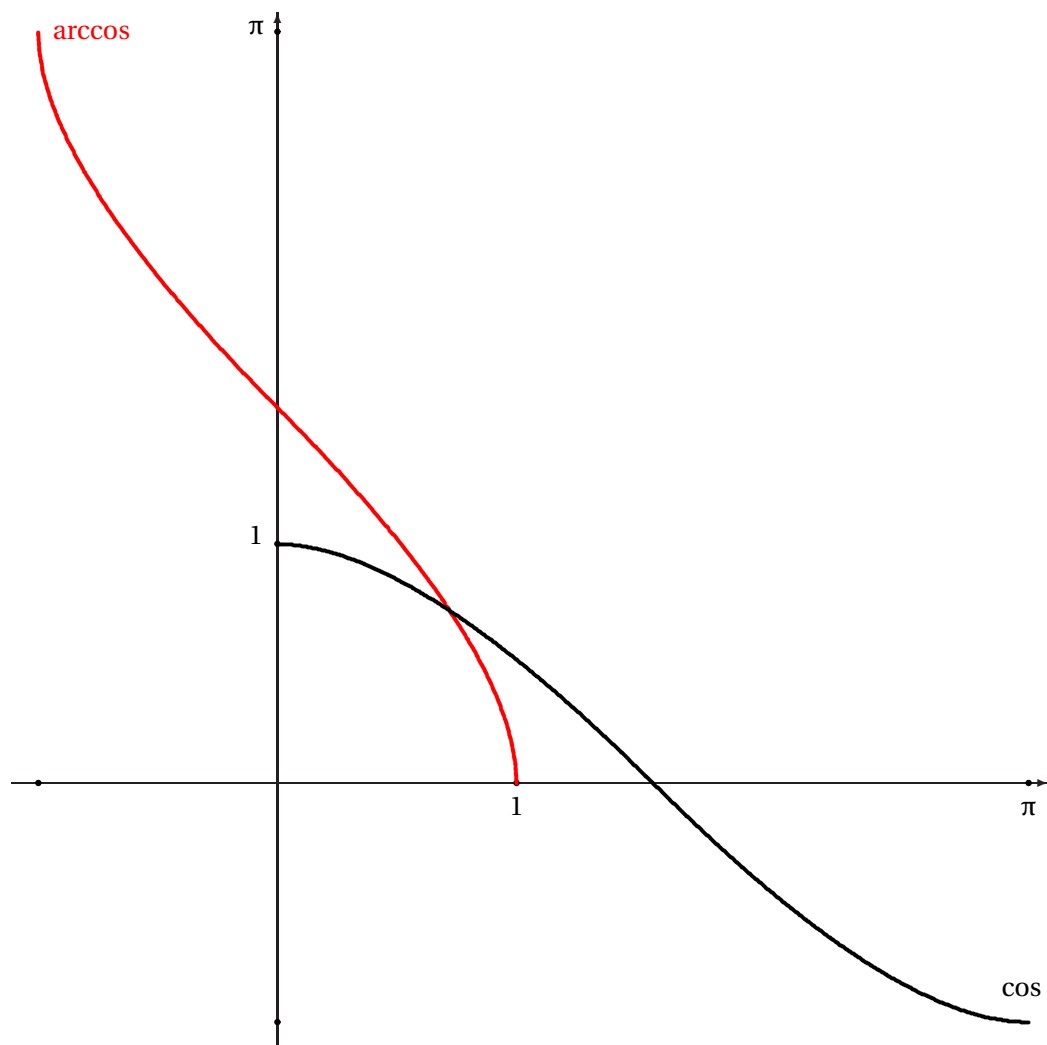
$$\text{donc} \quad \forall x \in] -1; 1[\quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

On vérifie enfin que

$$\arccos(-1) + \arcsin(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arccos 1 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ce qui achève la démonstration. □

D'après le théorème précédent, la courbe de la fonction \arccos peut être aisément déduite de celle de \arcsin : il suffit de retourner cette dernière autour de l'axe des abscisses, puis de la remonter de $\frac{\pi}{2}$:



La Fonction Arctangente

Il s'agit de la dernière fonction circulaire réciproque, qui inverse la fonction tangente.

Définition 12.6.35

La fonction Arctangente, notée \arctan , est la bijection réciproque de la fonction \tan restreinte à $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Théorème 12.6.36

\arctan est la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ caractérisée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan \arctan x = x$$

De plus,

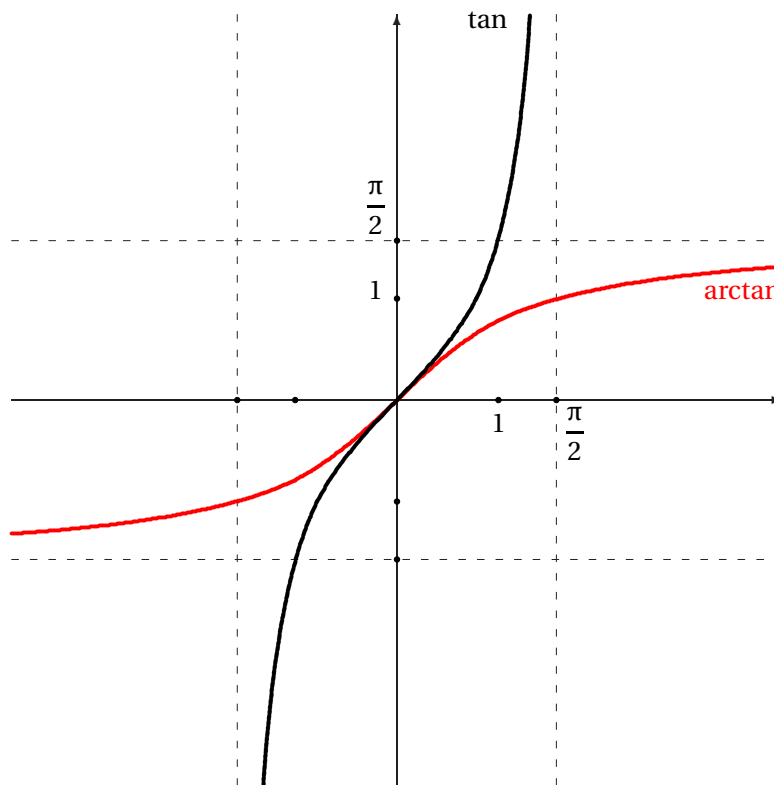
$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\quad \arctan \tan x = x$$

Enfin,

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\quad \arctan(-x) = -\arctan x$$

Preuve : Tout marche comme avec l'arcsinus. La seule différence se trouve être les intervalles considérés : cela est dû au fait que \tan est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . Sa bijection réciproque est donc une fonction de \mathbb{R} sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. \square

Le graphe d'arctan ressemble à :



Parlons maintenant des propriétés de dérivabilité et des limites de arctan.

Théorème 12.6.37

1. La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

2. La fonction arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. $\forall x > 0 \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

5. arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

et $\forall x \in [-1; 1] \quad \arctan x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Preuve :

1. Encore et toujours le théorème de dérivabilité d'une réciproque : la dérivée de la fonction \tan vaut $1 + \tan^2$ et ne s'annule donc jamais sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Sa réciproque est donc dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

2. Il en découle que la fonction \tan est strictement croissante : sa dérivée est en effet strictement positive.

3. On définit $\forall x > 0 \quad g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

g est dérivable d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, et

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \arctan' x - \frac{1}{x^2} \arctan' \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2(1 + 1/x^2)} = 0$$

La fonction g est donc constante. La valeur de cette constante peut être lue en tout point. En particulier :

$$g(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : $\forall x > 0 \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

4. D'après le théorème de la limite monotone, \arctan admet une limite ℓ en $+\infty$. Aussi, comme \arctan est dérivable en 0, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan x = \arctan 0 = 0$$

On peut donc appliquer le théorème de composition des limites et la relation montrée au point 3 pour obtenir :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan x + \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = 0 + \ell$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Comme \arctan est impaire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ □

5. La dérivée d' \arctan est de classe \mathcal{C}^∞ donc \arctan est infiniment dérivable. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - ix} + \frac{1}{1 + ix} \right)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \arctan^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!i^{n-1}}{2} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(1-ix)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} \right)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \arctan^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!i^{n-1}}{2} ((-1)^{n-1} + 1)$
 $= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)!(-1)^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

D'après le théorème de Taylor-Young,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2k+2})$$

À présent, soient $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On commence par estimer $\arctan^{(2n+2)}$:

$$\forall y \in [-x; x] \quad \arctan^{(2n+2)}(y) = \frac{(2n+1)!(-1)^n i}{2} \left(\frac{-1}{(1-iy)^{2n+2}} + \frac{1}{(1+iy)^{2n+2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \forall y \in [-x; x] \quad |\arctan^{(2n+2)}(y)| &\leq \frac{(2n+1)!}{2} \left(\frac{1}{|1-iy|^{2n+2}} + \frac{1}{|1+iy|^{2n+2}} \right) \\ &\leq \frac{(2n+1)!}{(1+y^2)^n} \leq (2n+1)! \end{aligned}$$

Comme \arctan est de classe \mathcal{C}^{2n+1} et $2n+2$ fois dérivable sur $[-x; x]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange fournit

$$\left| \arctan x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} x \leq \frac{1}{2n+2}$$

$$\text{d'où } \forall x \in [0; 1] \quad \arctan x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Comme \arctan est impaire, cette formule est aussi vraie pour $x \in [-1; 0]$. □

12.6.9 Fonctions Hyperboliques

Fonctions Hyperboliques Directes

Définition 12.6.38

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques, notées ch et sh , sont définies sur \mathbb{C} par les relations

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz) \quad \text{et} \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz)$$

La fonction ch s'annule sur $\{i\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et l'on peut définir la fonction tangente hyperbolique, notée th par la relation

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ i\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{th } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

Les propriétés suivantes ne demandent rien d'autre qu'un petit calcul.

Théorème 12.6.39

1. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{ch } z = \cos(iz) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{sh } z = -i \sin(iz) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$
3. ch , sh et th sont infiniment dérivables sur \mathbb{R} et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}' x = \text{sh } x \quad \text{sh}' x = \text{ch } x \quad \text{et} \quad \text{th}' x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$$

4. ch est paire ; sh et th sont impaires.

5. Ces fonctions, restreintes à \mathbb{R} , admettent les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1$$

6. th et sh sont strictement croissantes sur \mathbb{R} .

ch est strictement décroissante (resp. croissante) sur \mathbb{R}_- (resp. \mathbb{R}_+).

Ces fonctions sont surtout étudiées du fait de leur analogie avec les fonctions de trigonométrie circulaire, comme nous allons le voir. Mais aussi parce que leurs réciproques ont des dérivées intéressantes.

Il est également notable que la fonction ch a une interprétation physique simple. Si l'on prend une chaîne et qu'on la pend par ses deux bouts, la courbe qu'elle forme est de la forme $x \mapsto A \operatorname{ch}(\alpha x + \beta)$. Cette courbe est appelée « chaînette ».

Théorème 12.6.40

Les fonctions ch , sh et th satisfont les formules d'addition suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad & \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta \\ & \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \alpha \\ & \operatorname{th}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{th} \alpha + \operatorname{th} \beta}{1 + \operatorname{th} \alpha \operatorname{th} \beta} \\ \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} \beta &= 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{sh} \beta &= 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

12.7 Développements limités

12.7.1 Définitions et premières propriétés

Définition 12.7.1

Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n si, et seulement si, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

$\sum_{k=0}^n a_k (X - a)^k$ est appelée une partie régulière d'un développement limité de f à l'ordre n .

Commençons par une observation qui nous simplifiera la vie : dans la mesure où l'on peut composer à droite dans les expressions faisant intervenir les « petits o », une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \iff f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n)$$

Cette équivalence est obtenue en composant à droite par $h \mapsto a+h$ l'expression de gauche et par $x \mapsto x-a$ l'expression de droite. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre n en a si et seulement si $h \mapsto f(a+h)$ en admet un à l'ordre n en 0. Conclusion : il suffit d'étudier les développements limités en 0, tous les autres peuvent s'y ramener. Nous ferons donc cela.

Remarquons aussi que si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en admet un à tout ordre $m \leq n$. En effet, si l'on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

il est également vrai que
$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^m a_k x^k + o(x^m)$$

dans la mesure où toute puissance de x supérieure à $m+1$ est négligeable devant x^m .

Enfin, si on note p l'indice (s'il existe) du premier coefficient non nul dans un développement limité de f à l'ordre n en 0, on a alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + o(x^p)$$

Autrement dit,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$$

Donc les développements limités ont comme application immédiate la recherche d'équivalents, et donc de limites.

Théorème 12.7.2 (Unicité des coefficients d'un DL)

Soit f une fonction admettant au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n . Alors ce dernier est unique.

Preuve : Supposons que f admette en 0 les deux développements limités suivants à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

et

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

Notons

$$A = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid a_k \neq b_k\}$$

et supposons A non vide. Il admet donc un plus petit élément, noté p . Ce qui signifie que

$$\forall k < p \quad a_k = b_k$$

D'après la dernière remarque formulée plus haut,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + o(x^p) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_p x^p + o(x^p)$$

Par suite,

$$a_p - b_p \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$$

ce qui implique que $a_p - b_p = 0$. C'est une contradiction. Donc A est vide et

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_k = b_k \quad \square$$

Théorème 12.7.3 (Développements limités et régularité)

- Une fonction admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si, et seulement si, elle est continue en 0.
- Une fonction admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si, et seulement si, elle est dérivable en 0.
- Toute fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0 admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Preuve : Tout a déjà été fait dans les paragraphes sur la continuité et la dérivabilité. Le dernier point, en particulier, résulte du théorème de Taylor-Young. □

Notons que l'existence d'un développement limité à l'ordre n et d'une dérivée n -ème sont des notions équivalentes **uniquement pour $n = 0$ ou $n = 1$!**

Il existe ainsi des fonctions admettant un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qui ne sont pas 2 fois dérivables. Prenons par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors
$$f(x) = x^2 \times x \sin \frac{1}{x^2} = o(x^2)$$

et f admet bien un développement limité à l'ordre 2 en 0. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

qui n'admet pas de limite en 0. Donc f' n'a aucune chance d'être continue en 0 ; elle en a encore moins d'être dérivable deux fois en 0.

On peut faire encore mieux (ou pire, suivant les points de vue) : il existe des fonctions qui admettent des développements limités à tout ordre en 0, sans pour autant être ne serait-ce que \mathcal{C}^1 au voisinage de 0. Vérifiez qu'une telle fonction est $x \mapsto e^{-1/x^2} \sin e^{1/x^2}$.

12.7.2 Opérations sur les développements limités

On pourrait se dire que grâce à la formule de Taylor, on est capable de trouver tous les développements limités qu'on souhaite pourvu que la fonction considérée soit suffisamment régulière. Théoriquement, c'est vrai. Pratiquement, les calculs de dérivées n -èmes sont inhumains pour la plupart des fonctions. Heureusement, il y a plus simple.

Théorème 12.7.4 (Addition des développements limités)

Soient f et g deux fonctions qui ont, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre n . Alors $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est la somme des parties régulières de f et g .

Preuve : Il s'agit simplement des règles d'addition entre relations avec « petits o ». Si on sait que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

et

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

alors

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + o(x^n) \quad \square$$

Théorème 12.7.5 (Multiplication des développements limités)

Soient f et g deux fonctions qui ont, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre n . Alors fg admet un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est le produit des parties régulières de f et g , tronqué à l'ordre n (c'est-à-dire qu'on se débarrasse des termes d'ordre $n + 1$ ou supérieur).

Preuve : Notons

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{=A(x)} + o(x^n)$$

et

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^n b_k x^k}_{=B(x)} + o(x^n)$$

Alors

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x)B(x) + (A(x) + B(x))o(x^n) + o(x^{2n})$$

Or,

$$(A(x) + B(x))o(x^n) = o(x^n) \quad \text{et} \quad o(x^{2n}) = o(x^n)$$

donc

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x)B(x) + o(x^n)$$

Et tous les termes du polynôme AB dont le degré est supérieur à $n + 1$ sont négligeables devant x^n et on peut les intégrer dans le $o(x^n)$. On obtient alors le produit AB , tronqué à l'ordre n . \square

Théorème 12.7.6 (Composition des développements limités, admis)

Soient f et g deux fonctions qui ont, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre n . On suppose de plus que $g(0) = 0$. Posons

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x) + o(x^n) \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}_n[X]$$

Alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est le polynôme composé $A \circ B$, tronqué à l'ordre n .

Preuve : Dans la mesure où $g(0) = B(0) = 0$, 0 est racine de B . Notons p son ordre ; il existe $B_1 \in \mathbb{R}_{n-p}[X]$ tel que $B = X^p B_1$ et $B_1(0) \neq 0$. On sait qu'on peut composer à droite dans une relation faisant intervenir un « petit o » donc

$$f(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(g(x)) + o(g(x)^n)$$

Or, $g(x)^n = x^n B_1(x)^n$ donc $o(g(x)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$

d'où $f(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(B(x) + o(x^n)) + o(x^n)$

Posons $A = \sum_{k=0}^n A_k X^k$

de sorte que $A(B(x) + o(x^n)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n A_k (B(x) + o(x^n))^k$

Ensuite, $(B(x) + o(x^n))^k \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x)^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} B(x)^{k-j} o(x^{nj}) = B(x)^k + o(x^n)$

d'où $f(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n A_k B(x)^k + o(x^n) = A(B(x)) + o(x^n)$

Mais dans le polynôme $A \circ B$, les termes de degré supérieur à $n + 1$ peuvent être négligés devant x^n . Donc on obtient bien que $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est $A \circ B$ tronqué à l'ordre n . □

Exemple 12.7.7

Imaginons qu'on ait à développer $\cos(\sin x)$ à l'ordre 3 en 0. Le théorème de composition des développements limités nous dit qu'on aura besoin du développement à l'ordre 3 du sinus et du cosinus. On commence par les écrire :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Les parties régulières sont, en respectant les notations de l'énoncé :

$$A = 1 - \frac{X^2}{2} \quad \text{et} \quad B = X - \frac{X^3}{6}$$

On calcule le polynôme $A \circ B$, en prenant bien soin de ne pas calculer les termes de degré 4 ou plus, car on va de toute manière les négliger. On voit qu'on aura juste besoin du calcul de B^2 , qu'on fait immédiatement :

$$B^2 = \left(X - \frac{X^3}{6}\right)^2 = X^2 + \text{termes de degré 4 ou plus}$$

d'où $A \circ B = 1 - \frac{X^2}{2} + \text{termes de degré 4 ou plus}$

et $\cos \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Une remarque au passage : le $x^3/6$ du sinus n'a servi à rien. Pouvait-on le prévoir? Oui, avec de l'habitude et en connaissant nos développements de fonctions usuelles sur le bout des doigts. En effet, on pouvait se dire que le cosinus n'a pas de terme d'ordre 1 donc ferait immédiatement intervenir le carré du développement du sinus ; et ce dernier (toujours dans notre tête) n'a clairement pas de terme d'ordre 3. Faire cette gymnastique avant de se lancer dans le calcul d'un développement limité est fondamental pour éviter de longs calculs et diminuer les risques d'erreurs.

Exemple 12.7.8

On peut désormais calculer les développements limités d'inverses, à l'aide de la formule

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

En effet, si f est une fonction telle que $f(0) = a \neq 0$, on a

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a + (f(x) - a)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{f(x)-a}{a}}$$

La fonction $h : x \mapsto \frac{f(x) - a}{a}$ s'annule en 0 donc si f admet un développement limité en 0, le théorème de composition nous dit comment obtenir celui de $1/f$.

Exemple 12.7.9

Mettons cela en œuvre pour calculer le développement à l'ordre 4 de $1/\cos x$ en 0. On a

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + (\cos x - 1)}$$

On aura besoin du développement à l'ordre 4 de $1/(1+x)$ et de $\cos x - 1$ en 0. On les écrit :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

et

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Pour conserver les notations du théorème de composition, on prend

$$A = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 \quad \text{et} \quad B = -\frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$$

et on doit calculer $A \circ B = 1 - B + B^2 - B^3 + B^4$. Il nous faut donc les puissances de B ; on n'oublie pas que seuls les termes de degré inférieur à 4 nous intéressent, donc on ne perd pas de temps à calculer les autres. On a

$$B = -\frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$$

$$B^2 = \frac{X^4}{4} + \text{termes de degré 5 ou plus}$$

$$B^3 = \text{termes de degré 6 ou plus}$$

$$B^4 = \text{termes de degré 8 ou plus}$$

donc

$$\begin{aligned} A \circ B &= 1 + \frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{24} + \frac{X^4}{4} + \text{termes de degré 5 ou plus} \\ &= 1 + \frac{X^2}{2} + \frac{5X^4}{24} + \text{termes de degré 5 ou plus} \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

En fait, on peut même pousser ce développement plus loin d'un ordre, sans travail supplémentaire : le cosinus est une fonction paire, donc il n'y aura pas de termes de degré impair. D'où

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

Profitons-en pour illustrer le théorème de multiplication des développements limités, dans le but d'obtenir \tan à l'ordre 5 en 0. On a

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$$

et
$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Il suffit de multiplier ce développement avec celui qu'on vient d'obtenir, en négligeant les termes de degré 6 ou plus. On trouve :

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24}\right) - \frac{1}{6} \left(x^3 + \frac{x^5}{2}\right) + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Tous calculs faits,
$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

La dernière opération qui nous intéresse est la dérivation. Avant d'aborder un théorème de dérivation des développements limités, nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 12.7.10

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0, telle que

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$

Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + o(x^{n+1})$$

Preuve : C'est une conséquence de la règle de l'Hospital. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^n} = 0 \quad \square$$

Théorème 12.7.11 (Dérivation des développements limités)

Soit f une fonction dérivable, telle que f' admet un développement limité à l'ordre n en 0. Alors f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0, dont la dérivée est le développement de f' .

Preuve : On sait que f' admet un développement limité à l'ordre n en 0, qu'on écrit sous la forme :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

On considère la fonction auxiliaire définie par l'expression

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Alors g est dérivable au voisinage de 0 et

$$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = o(x^n)$$

D'après le **Lemme 6.10**,

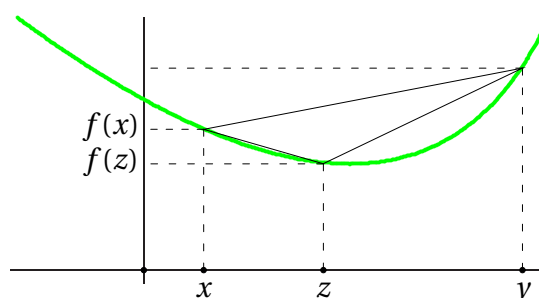
$$g(x) = g(0) + o(x^{n+1}) = f(0) + o(x^{n+1})$$

d'où
$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}) \quad \square$$

12.8 Convexité

Ce dernier paragraphe est consacré à l'étude d'une propriété particulière à certaines fonctions : la convexité. C'est un outil très utile pour obtenir des inégalités intéressantes, très difficiles (voire impossible) à avoir autrement.

Une fonction convexe f est une fonction, définie sur un intervalle, dont le graphe se trouve au-dessous de toutes ses cordes : si x et y sont dans le domaine de définition de f , on demande que pour tout $z \in [x; y]$, le point $(z, f(z))$ se trouve au-dessous de la droite qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$:



La droite qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est dirigée par le vecteur

$$u = \begin{bmatrix} y - x \\ f(y) - f(x) \end{bmatrix}$$

et l'on a $(x, f(x)) = (x, f(x)) + 0 \times u$ $(y, f(y)) = (x, f(x)) + 1 \times u$

Le segment qui relie $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est donc l'ensemble des points

$$\{(x, f(x)) + \theta u \mid \theta \in [0; 1]\} = \{(\theta x + (1 - \theta)y, \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)) \mid \theta \in [0; 1]\}$$

Tout ceci motive la définition suivante :

Définition 12.8.1 (Fonctions convexes et concaves)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est *convexe* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in I \quad \forall \theta \in [0; 1] \quad f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

On dit qu'elle est *strictement convexe* si l'inégalité est stricte pour $\theta \in]0; 1[$.

Enfin, on dit qu'elle est (*strictement*) *concave* si, et seulement si, $-f$ est (*strictement*) convexe.

Montrer qu'une fonction est convexe est, à partir de la seule définition, une chose assez difficile. Le but de cette section est de trouver des conditions simples qui impliquent la convexité, de manière à pouvoir exploiter ces inégalités. Commençons par observer que :

Proposition 12.8.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Elle est convexe si, et seulement si,

$$\forall x, z, y \in I \quad x < z < y \implies \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{1}$$

Dans ce cas, on peut ajouter que

$$\forall x, y, z \in I \quad x < z < y \implies \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{2}$$

f est strictement convexe si, et seulement si, on a la proposition (1) avec des inégalités strictes. Dans ce cas, la proposition (2) est vraie, avec des inégalités strictes.

Preuve : Montrons la partie sur la convexité stricte ; la preuve pour la convexité large est identique, à ceci près qu'on a des inégalités larges tout du long. Donnons-nous $x < y < z$ dans I ; on a alors

$$z = \theta x + (1 - \theta)y \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{y-z}{y-x} \quad 1 - \theta = \frac{z-x}{y-x}$$

Supposons que f est strictement convexe. Alors

$$f(z) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) = (1 - \theta)(f(y) - f(x)) + f(x)$$

d'où $f(z) - f(x) < (1 - \theta)(f(y) - f(x))$

et $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Mais on peut aussi écrire que

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) = \theta(f(x) - f(y)) + f(y)$$

donc $f(z) - f(y) < \theta(f(x) - f(y))$

et $\frac{f(z) - f(y)}{y - z} < \frac{f(x) - f(y)}{y - x}$

ou encore $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$

On a bien $\forall x, y, z \in I \quad x < y < z \implies \frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$

Réciproquement, supposons la condition (1), avec des inégalités strictes. On se donne $x, y \in I$ et $\theta \in]0; 1[$ et on pose $z = \theta x + (1 - \theta)y$. On a alors

$$\theta = \frac{y-z}{y-x} \quad (1 - \theta) = \frac{z-x}{y-x}$$

et notre inégalité s'écrit, en fonction de θ :

$$\frac{f(z) - f(x)}{1 - \theta} < f(y) - f(x) < \frac{f(y) - f(z)}{\theta}$$

En utilisant l'inégalité de gauche, il vient

$$f(z) - f(x) < (1 - \theta)(f(y) - f(x))$$

d'où $f(\theta x + (1 - \theta)y) = f(z) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$ □

Corollaire 12.8.3

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . Alors elle est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur à I . De plus,

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'_d(x) \leq f'_g(x)$$

et $\forall x, y \in \overset{\circ}{I} \quad x < y \implies f'_d(x) \leq f'_g(y)$

Si f est strictement convexe, cette inégalité est stricte.

Preuve : On suppose f convexe et on pose, pour tout $z \in \overset{\circ}{I}$,

$$I_z^- = I \cap]-\infty; z[\quad I_z^+ = I \cap]z; +\infty[$$

Le fait que z est intérieur à I assure que ces intervalles ne sont pas vides et cela rend possible toute la suite de la démonstration. On définit aussi deux fonctions g_- et g_+ :

$$\forall x \in I_z^- \quad g_-(x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

et
$$\forall y \in I_z^+ \quad g_+(y) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

La **proposition 8.2** montre que g_- est majorée et g_+ est minorée puisque

$$\forall x \in I_z^- \quad \forall y \in I_z^+ \quad g_-(x) \leq g_+(y)$$

Ceci montre aussi que
$$\sup_{x \in I_z^-} g_-(x) \leq \inf_{y \in I_z^+} g_+(y)$$

De plus, si $x < x'$ sont dans I_- , on a $x < x' < z$ donc

$$g_-(x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(x')}{z - x'} = g_-(x')$$

g_- est croissante, majorée. D'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{x \rightarrow z^-} g_-(x)$ existe et est finie : f est dérivable à gauche en z et

$$f'_g(z) = \sup_{x \in I_z^-} g_-(x)$$

De la même manière, on montre que g_+ est croissante, minorée, donc $\lim_{y \rightarrow z^+} g_+(y)$ existe et est finie : f est dérivable à droite en z . Ceci montre que f est dérivable à gauche et à droite en tout point et

$$f'_d(z) = \inf_{y \in I_z^+} g_+(y)$$

On a donc
$$f'_g(z) \leq f'_d(z)$$

On fixe maintenant x et y dans I . On sait que

$$\forall z \in]x; y[\quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

donc
$$f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

De même,
$$\forall z \in]x; y[\quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

donc
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y)$$

ce qui fournit
$$f'_d(x) \leq f'_g(y)$$

Enfin, on suppose que f est strictement convexe et on se donne $x < y$ dans I . Pour avoir l'inégalité stricte, on va avoir besoin de deux points intermédiaire $z_0 < z_1$ dans $]x; y[$. D'après ce qu'on a vu plus haut,

$$f'_d(x) \leq \frac{f(z_0) - f(x)}{z_0 - x} \quad (\text{car } x < z_0)$$

et
$$\frac{f(y) - f(z_1)}{y - z_1} \leq f'_g(y) \quad (\text{car } z_1 < y)$$

De plus,
$$\frac{f(z_0) - f(x)}{z_0 - x} < \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} \quad (\text{car } x < z_0 < z_1)$$

et enfin
$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} < \frac{f(y) - f(z_1)}{y - z_1} \quad (\text{car } z_0 < z_1 < y)$$

Par suite,
$$f'_d(x) \leq \frac{f(z_0) - f(x)}{z_0 - x} < \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} < \frac{f(y) - f(z_1)}{y - z_1} \leq f'_g(y) \quad \square$$

Corollaire 12.8.4

Toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

Corollaire 12.8.5

Soit f une fonction dérivable sur I . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe (resp. strictement convexe) ;
2. f' est croissante (resp. strictement croissante) ;
3. le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes (resp. strictement), c'est-à-dire

$$\forall x_0 \in I \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{resp. } <)$$

Preuve : Supposons que f est convexe (resp. strictement). Comme elle est dérivable sur I , le **corollaire 8.3** montre que f' est croissante (resp. strictement).

Supposons f' croissante (resp. strictement). Soient $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$; par exemple, supposons $x < x_0$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Mais $c < x_0$ et f' est croissante (resp. strictement) donc $f'(c) \leq f'(x_0)$ (resp. $f'(c) < f'(x_0)$). Par suite,

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0) \quad (\text{resp. } <)$$

On ferait de même si $x_0 < x$.

Enfin, supposons que le graphe de f est au-dessus (resp. strictement) de toutes ses tangentes. On se donne $x < y$ dans I et $\lambda \in]0; 1[$. On note $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$; comme le graphe de f est au-dessus de sa tangente en z , on a

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq \lambda(f(z) + f'(z)(x - z)) + (1 - \lambda)(f(z) + f'(z)(y - z)) \quad (\text{resp. } >)$$

Mais un calcul montre que le membre de droite se simplifie en $f(z)$: f est convexe (resp. strictement).

Ce théorème est très utile, puisqu'on a des outils pour étudier la croissance d'une fonction ; et il fournit alors des conséquences géométriques intéressantes.

Par exemple, l'exponentielle est strictement convexe d'après ce théorème. Si $c \in \mathbb{R}$, on peut dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\} \quad e^x > e^c(x - c) + e^c = e^c(x + 1 - c)$$

On retrouve en particulier, sans le moindre calcul, l'inégalité classique

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad e^x > 1 + x$$

De la même manière, le logarithme est immédiatement concave et l'on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \quad \ln x < x - 1$$

Les deux corollaires suivants sont triviaux d'après ce qui précède :

Corollaire 12.8.6

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I . Elle est convexe si, et seulement si, f'' est positive sur I .

Définition 12.8.7 (Point d'inflexion)

Soit f une fonction définie sur I . Soit a un point intérieur à I . On dit que a est un point d'inflexion de f si, et seulement si f est convexe dans un voisinage à gauche de a , et concave dans un voisinage à droite de a . Ou le contraire.

Corollaire 12.8.8

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur I . Soit a un point intérieur à I . C'est un point d'inflexion de f si, et seulement si, $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a .

Enfin, l'inégalité de convexité peut être généralisée à plusieurs points intermédiaires :

Théorème 12.8.9 (Convexité généralisée)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . Pour tout entier $n \geq 2$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]0; 1[$, tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Si f est strictement convexe, l'inégalité est stricte.

Preuve : On procède par récurrence. Le cas $n = 2$ est simplement la définition d'une fonction convexe.

Soit $n \geq 2$ un entier ; on suppose savoir que pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]0; 1[$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in]0; 1[$, tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. On pose

$$\lambda = 1 - \lambda_{n+1} > 0 \quad x = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k$$

de sorte que $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{\lambda} = 1$ et $\lambda x + (1 - \lambda)x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k$

On sait que $f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} f(x_k)$

donc $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\lambda x + (1 - \lambda)x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_{n+1})$
 $\leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

Ceci démontre la propriété au rang $n + 1$. On a gagné. □