Chapitre 2

Introduction à l'algèbre linéaire

Dans tous les chapitres du cours d'algèbre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

2.1 Espaces Vectoriels

2.1.1 Définition et exemples

Définition 2.1.1
Soit $(\mathrm{E}, +)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0. On dit que E est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* si, et seulement si, il existe une application

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{E} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1. & \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 & \forall \lambda \in \mathbb{K} & \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ 2. & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 & \forall x \in \mathrm{E} & (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y \\ 3. & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 & \forall x \in \mathrm{E} & \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \\ 4. & \forall x \in \mathrm{E} & 1 \cdot x = x & \end{array}$$

Les éléments de E sont alors appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*. L'opération + est appelée *addition* et l'opération $\cdot$ est appelée *multiplication externe*.

Beaucoup d'objets étudiés jusqu'à présent sont des espaces vectoriels. Voici des exemples :

Exemple 2.1.2

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3. Le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. L'espace vectoriel de dimension 3 $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Plus généralement, si $n \geqslant 1$, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on a défini les opérations suivantes :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n \qquad (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

6. Si A est un ensemble non vide et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{E})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations

$$\forall (f,g) \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{E})^2 \quad \forall a \in \mathrm{A} \qquad (f+g)(a) = f(a)+g(a)$$

et
$$\forall f \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{E}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall a \in \mathrm{A} \qquad (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot (f(a))$$

En particulier, l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2.1.2 Règles de calcul

Les propriétés définissant un espace vectoriel sont le minimum vital pour pouvoir travailler avec ces objets. Comme $(\mathrm{E},+)$ est un groupe commutatif, on sait déjà (voir le chapitre sur les structures) que 0_{E} est l'unique élement neutre pour l'addition et que tout élément de E admet un unique opposé.

Nous allons donc, dans cette partie, élaborer sur la **définition 1.1** pour obtenir les autres règles de calcul élémentaires dans un espace vectoriel.

On commence par rappeler :

Proposition 2.1.3
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. L'ensemble*

$$\{e \in \mathrm{E} \mid \forall x \in \mathrm{E} \quad x+e = e+x = x\}$$

est un singleton.

Preuve : Déjà fait dans le chapitre sur les structures algébriques. □

Proposition 2.1.4
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, soit* $x \in \mathrm{E}$. *L'ensemble*

$$\{y \in \mathrm{E} \mid x+y = y+x = 0_{\mathrm{E}}\}$$

est un singleton. L'unique élément qu'il contient est noté $-x$.

Preuve : Même chose. □

Corollaire 2.1.5
Soit E *un espace vectoriel. Alors*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathrm{E}}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda \cdot 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$$

et enfin
$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \lambda \cdot x = 0_{\mathrm{E}} \iff x = 0_{\mathrm{E}} \text{ ou } \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$

Preuve : Soit $x \in \mathrm{E}$. D'après le point *2* de la **définition 1.1**,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$$

On ajoute aux deux membres de cette égalité le vecteur $-0_{\mathbb{K}} \cdot x$ pour conclure :

$$0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$$

Pour le second point, on procède de manière similaire. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après le point *2* de la **définition 1.1**,

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

On ajoute alors aux deux membres le vecteur $-(\lambda \cdot 0_E)$ pour obtenir

$$0_E = \lambda \cdot 0_E$$

Le dernier point est une équivalence, dont une direction vient d'être démontrée. On prouve l'autre direction. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda \cdot x = 0_E$. Soit λ est nul, auquel cas on a fini ; soit λ n'est pas nul, auquel cas on peut écrire, d'après les règles *3* et *4* de la **définition 1.1**,

$$x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot x = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E \qquad \square$$

Corollaire 2.1.6
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Alors*

$$\forall x \in E \qquad (-1) \cdot x = -x$$

Preuve : Soit x un élément quelconque de E. Pour établir que $(-1) \cdot x$ n'est autre que $-x$, il suffit de montrer, d'après la **proposition 1.4**, que $(-1) \cdot x + x = 0_E$. On utilise les règles *4* et *2* de la **définition 1.1** ainsi que le **corollaire 1.5** :

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1+1) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \qquad \square$$

Corollaire 2.1.7
Soit E *un espace vectoriel. On a*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad -(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x$$

Preuve : Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après le **corollaire 1.5** et le point *3* de la **définition 1.1**,

$$-(\lambda \cdot x) = (-1) \cdot (\lambda \cdot x) = (-1 \times \lambda) \cdot x = (-\lambda) \cdot x \qquad \square$$

Corollaire 2.1.8
Soit E *un espace vectoriel. On a*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x,y) \in E^2 \qquad \lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$$

et

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot y$$

Preuve : C'est simple, d'après tout ce qui précède. En effet, si λ est un scalaire et x, y sont deux vecteurs,

$$\lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-1 \cdot y) = \lambda \cdot x + (-\lambda \cdot y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$$

De même, si λ et μ sont deux scalaires et x est un vecteur,

$$(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + (-\mu \cdot x) = \lambda \cdot x - \mu \cdot x \qquad \square$$

Toutes ces propriétés montrent qu'au final, la multiplication externe et l'addition se manipulent de la même manière que le produit ou l'addition usuels sur les réels, avec les mêmes règles de distributivité, de signes, le fait qu'un produit est nul si et seulement si l'un des termes est nul, etc. Donc, comme tout marche comme d'habitude, on laisse tomber la notation $\lambda \cdot x$ et on écrira simplement λx.

De même, on abandonne les 0_E et $0_{\mathbb{K}}$ pour la notation uniforme 0, en sachant que le contexte rendra clair à chaque fois de quel 0 il s'agit.

2.1.3 Sous-espaces vectoriels

L'un des buts de l'algèbre est d'étudier des ensembles, munis d'une structure (règles de calcul), de la manière la plus générale possible. Pour certaines structures algébriques, il y a besoin de livres entiers pour faire cela. Pour d'autres, comme les espaces vectoriels, deux années de cours suffisent. Mais dans tous les cas, le plan d'étude est de décomposer notre gros ensemble en sous-ensembles ayant la même structure algébrique, puis de les décomposer eux-mêmes, et encore et encore, en espérant qu'à un moment on aura atteint un état « irréductible » de la structure étudiée, suffisamment simple pour qu'il puisse être compris entièrement. C'est la raison pour laquelle on introduit la notion de sous-espace :

Définition 2.1.9
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F \subset E$. On dira que F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E si et seulement si F, muni de la restriction à $F \times F$ de l'addition, et de la restriction à $\mathbb{K} \times F$ de la multiplication, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel requiert *a priori* la vérification des 4 propriétés de la **définition 1.1**. C'est douloureux et on donne un critère permettant de vérifier sans trop de mal si F est ou pas un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 2.1.10
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* F *un sous-ensemble de* E. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* F *n'est pas vide et*

$$\forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda x - y \in F \tag{1}$$

Preuve : Il est clair que si F est un sous-espace vectoriel de E, il n'est pas vide (il contient 0) et il vérifie la propriété énoncée dans la proposition.

Réciproquement, soit F un sous-ensemble de E, non vide, tel que

$$\forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda x - y \in F$$

En particulier, $$\forall x, y \in F \qquad x - y \in F$$

donc $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$.

Puis on prend x quelconque dans F, $y = 0$ et λ quelconque dans $\mathbb{K}$ et on applique la propriété (**1**). On conclut que $\lambda x \in F$. Donc la multiplication externe, restreinte à $\mathbb{K} \times F$ prend bien ses valeurs dans F.

Ces opérations vérifient clairement les propriétés *1*, *2*, *3* et *4* d'un espace vectoriel, dans la mesure où $F \subset E$. □

Exemple 2.1.11
À l'aide du **théorème 1.10**, il est quasiment immédiat que les ensembles suivant sont des espaces vectoriels :

1. $i\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (sous-espace de $\mathbb{C}$) ;

2. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, admettant une limite nulle en $+\infty$ (sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) ;
3. l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) ;
4. l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à un entier n donné (sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).
5. et plein d'autres.

En revanche, l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. De même que l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers $26,92$ en $+\infty$. Pour une raison très simple : aucun d'eux ne contient 0.

On peut se demander quelles opérations laissent stables les sous-espaces vectoriels. Si l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel, on a en revanche :

Théorème 2.1.12
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $\mathscr{F}$ *une famille quelconque, non vide, de sous-espaces vectoriels de* E. *L'ensemble* $\mathrm{G} = \bigcap_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \mathrm{F}$ *est un sous-espaces vectoriel de* E.

Preuve : Il suffit d'appliquer le critère donné par le **théorème 1.10**. D'une part, G n'est pas vide puisqu'il contient le vecteur nul. D'autre part, donnons-nous x et y dans G et λ un scalaire. Par définition de G,

$$\forall \mathrm{F} \in \mathscr{F} \qquad x \in \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad y \in \mathrm{F}$$

Si F est un élément quelconque de $\mathscr{F}$, c'est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda x - y$ s'y trouve. Ceci étant établi pour tout $\mathrm{F} \in \mathscr{F}$, on a montré que

$$\lambda x - y \in \bigcap_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \mathrm{F} = \mathrm{G}$$

C'est tout ce dont on a besoin pour conclure : G est un sous-espace de E. □

2.1.4 Sous-espace engendré par une partie de E

Théorème 2.1.13
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* A *une partie de* E. *Il existe un unique sous-espace vectoriel de* E *contenant* A, *qui soit contenu dans tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A. *On l'appelle* **sous-espace de** E **engendré par** A *et on le note* Vect A, *qui se lit* **vectorialisé de** A.

Preuve : On note $\mathscr{F}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. Évidemment, la famille $\mathscr{F}$ n'est pas vide : elle contient E, qui est bien un sous-espace vectoriel de E contenant A. D'après le **théorème 1.12**, l'ensemble

$$\mathrm{G} = \bigcap_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \mathrm{F}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Évidemment, G contient A : tout élément de $\mathscr{F}$ contient A, donc leur intersection doit aussi contenir A.

Enfin, par définition de G, il est contenu dans n'importe quel élément de $\mathscr{F}$; c'est-à-dire que tout sous-espace contenant A contient G. C'est ce qu'on voulait. □

Bien entendu, cette présentation de Vect A comme intersection d'une tonne de sous-espaces vectoriels de E n'est pas très agréable et on souhaiterait caracteriser ses éléments autrement. On introduit pour cela la notion de combinaison lin¨¦aire.

Définition 2.1.14 (Combinaison linéaire)
Soit A une partie non vide de E. On dit d'un élément x de E qu'il est une combinaison linéaire finie d'éléments de A si et seulement si

$$\exists n \in \mathbb{N}^\star \quad \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

Si A est vide, on décide par convention que 0 est la seule combinaison linéaire de A.

En français, une combinaison linéaire d'éléments de A, c'est une somme finie d'éléments de A, affectés de coefficients scalaires.

Théorème 2.1.15
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* A *une partie de* E*. Le sous-espace engendré par* A *est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de* A.

Preuve : Notons Comb A l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A et montrons que Comb A = Vect A. On pourrait procéder par double inclusion, mais on peut aussi utiliser le **théorème 1.13** qui caractérise Vect A comme étant l'unique sous-espace de E contenant A, contenu dans tout sous-espace contenant A.

Autrement dit, si on montre que

1. Comb A est un sous-espace vectoriel de E ;
2. Comb A contient A ;
3. Comb A est contenu dans tout sous-espace de E qui contient A,

alors automatiquement, Comb A ne peut être que Vect A.

Le deuxième point est trivial : tout élément de A est une combinaison linéaire d'éléments de A.

Le premier point est clair aussi, à la lumière du **théorème 1.10** : soient x et y des éléments de Comb A, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les vecteurs x et y sont des sommes finies d'éléments de A affectés de coefficients scalaires ; donc $\lambda x - y$ est aussi une somme finie d'éléments de A affectés de coefficients. C'est-à-dire que $\lambda x - y$ est une combinaison linéaire de A.

Enfin, le troisième point n'est pas plus difficile à prouver. Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A, il doit aussi contenir toute combinaison linéaire finie d'éléments de A. □

2.1.5 Somme de deux sous-espaces vectoriels

On a dit plus haut qu'en général, l'union de deux sous-espaces vectoriels F et G n'en est pas un. Mais on peut en créer un qui soit le plus économique possible, grâce au **théorème 1.13** : on sait que Vect $(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$ sera un sous-espace vectoriel, contenant F et G, et le plus petit possible réalisant cette propriété.

Définition 2.1.16
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Le sous-espace engendré par $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ est appelé *somme de* F *et* G, et on le note $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.

Proposition 2.1.17
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On a*

$$F + G = \{x + y \mid x \in F \quad y \in G\}$$

Preuve : Soit H l'ensemble $\{x + y \mid x \in F \quad y \in G\}$. On prouve le théorème de la même manière que dans la preuve du **théorème 1.15**, dans la mesure où $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$ est le plus petit sous-espace de E contenant F et G.

Il est immédiat que H contient F et G, puisque tout élément de F ou de G est une somme d'un élément de F et d'un élément de G.

H est aussi un sous-espace vectoriel de E, en vue du **théorème 1.10**.

Et tout sous-espace de E contenant $F \cup G$ doit contenir au grand minimum les sommes d'éléments de F et G. Donc doit contenir H.

D'après le **théorème 1.15**, H est le sous-espace de E engendré par $F \cup G$. □

2.1.6 Sous-espaces en somme directe

Définition 2.1.18
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'*ils sont en somme directe* si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. On notera leur somme $F \oplus G$.

L'intérêt de la notion de somme directe est rendu évident par le théorème suivant :

Théorème 2.1.19
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Ils sont en somme directe si et seulement si*

$$\forall z \in F + G \quad \exists!(x, y) \in F \times G \qquad z = x + y$$

Preuve : On suppose que F et G sont en somme directe, c'est-à-dire que $F \cap G = \{0\}$. Soit $z \in F + G$; d'après la **proposition 1.17**, il existe $x \in F$ et $y \in G$, tels que $z = x + y$. Supposons qu'on ait aussi $x' \in F$ et $y' \in G$, tels que $z = x' + y'$. Alors

$$x + y = x' + y'$$

d'où
$$x - x' = y' - y$$

Or, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$. Mais ces deux vecteurs sont égaux donc leur valeur commune est dans $F \cap G$. Ce dernier sous-espace est réduit à $\{0\}$. Donc

$$x - x' = 0 \qquad \text{et} \qquad y - y' = 0$$

ou encore
$$x' = x \qquad \text{et} \qquad y' = y$$

Réciproquement, on suppose que

$$\forall z \in F + G \qquad \exists!(x, y) \in F \times G \qquad z = x + y$$

En particulier, $0 = 0 + 0$ est la seule et unique manière de décomposer 0 comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Soit $z \in F \cap G$. Alors $z - z = 0$ est une décomposition de 0 comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc $z = 0$; par suite, $F \cap G = \{0\}$. Ces sous-espaces sont en somme directe. □

Définition 2.1.20
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$$

Exemple 2.1.21
Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. On note P le sous-espace vectoriel des applications paires et I le sous-espace vectoriel des applications impaires. Ces sous-espaces sont supplémentaires dans E.

En effet, ils sont en somme directe : si f est une fonction à la fois paire et impaire,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(-x) = -f(x)$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 0$$

et

$$\mathrm{P} \cap \mathrm{I} = \{0\}$$

Et leur somme est égale à E tout entier. En effet, si f est une fonction complexe d'une variable réelle, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Les fonctions

$$g : x \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h : x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sont respectivement paire et impaire. On les appelle naturellement partie paire et partie impaire de f.

Par exemple, ch est la partie paire de l'exponentielle, tandis que sh est sa partie impaire. Également, cos est la partie impaire de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ tandis que $\mathrm{i}\sin$ est sa partie impaire.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tel que F et G sont supplémentaires dans E, on voit que tout z de E peut être décomposé de manière unique sous la forme $z = x + y$, avec $x \in \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{G}$. Le premier est appelé *projection de z sur* F *parallèlement* à G, et on le note $p_{\mathrm{F}}(z)$. L'autre est appelé *projection de z sur* G *parallèlement* à F et on le note $p_{\mathrm{G}}(z)$.

2.2 Applications linéaires

Les applications linéaires sont les applications entre espaces vectoriels qui sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel. Cela sera rendu plus précis immédiatement. Puis on étudiera les propriétés immédiates de ces opérations.

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f une application de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Théorème 2.2.2
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. L'ensemble* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* F^{E}.

Preuve : Bien évidemment, l'application nulle est linéaire donc $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ n'est pas vide.

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, soit λ un scalaire arbitraire. On souhaite montrer que $\lambda f+g$ est linéaire. Il suffit de valider la définition :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \quad \forall \mu\in\mathbb{K} \qquad (\lambda f+g)(\mu x+y) &= (\lambda f)(\mu x+y)+g(\mu x+y)\\
&= \lambda f(\mu x+y)+\mu g(x)+g(y)\\
&= \mu\lambda f(x)+\lambda f(y)+\mu g(x)+g(y)\\
&= \mu(\lambda f(x)+g(x))+\lambda f(y)+g(y)\\
(\lambda f+g)(\mu x+y) &= \mu(\lambda f+g)(x)+(\lambda f+g)(y)
\end{aligned}$$

On voit que $\lambda f+g$ est linéaire. D'après le **théorème 1.10**, $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un sous-espace vectoriel de F^{E}. □

Définition 2.2.3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ est noté de manière plus abrégée $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Ses éléments sont appelés endomorphismes de E.

Proposition 2.2.4
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit* $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*, bijective. Alors* f^{-1} *est linéaire, c'est-à-dire que* $f^{-1}\in\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

Preuve : Soient y_1 et y_2 dans F, soit λ un scalaire. Comme f est bijective, on a

$$y_1=f(f^{-1}(y_1)) \qquad \text{et} \qquad y_2=f(f^{-1}(y_2))$$

d'où
$$\lambda y_1+y_2=\lambda f(f^{-1}(y_1))+f(f^{-1}(y_2))$$

Comme f est linéaire, il vient

$$\lambda y_1+y_2=f\big(\lambda f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)\big)$$

Il suffit d'appliquer f^{-1} :

$$f^{-1}(\lambda y_1+y_2)=\lambda f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)$$ □

Définition 2.2.5
Une application linéaire bijective entre espaces vectoriels est appelée *isomorphisme d'espaces vectoriels*.

Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et s'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que E et F sont *isomorphes*.

Définition 2.2.6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un isomorphisme de E dans lui-même est appelé *automorphisme de* E. Leur ensemble est noté $\mathscr{G}\mathscr{L}(\mathrm{E})$, et on l'appelle *groupe linéaire de* E. Autrement dit,

$$\mathscr{G}\mathscr{L}(\mathrm{E})=\{f\in\mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid f \text{ bijective}\}$$

Définition 2.2.7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est appelé *dual* de E. Ses éléments sont appelés des *formes linéaires*.

2.2.2 Noyau et image

Définition 2.2.8
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *noyau de* f l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

On appelle *image de* F l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad f(x) = y\}$$

Théorème 2.2.9
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. L'image par* f *de tout sous-espace vectoriel de* E *est un sous-espace vectoriel de* F*. L'image réciproque par* f *de tout sous-espace vectoriel de* F *est un sous-espace vectoriel de* E*. En particulier, Ker* f *et Im* f *sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de* E *et* F*.*

Preuve : On se donne E' un sous-espace de E. L'image de E' est

$$f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\}$$

Bien entendu, $f(E')$ n'est pas vide puisqu'il contient 0 :

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

Ensuite, soient y_1 et y_2 dans $f(E')$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de $f(E')$, il existe $x_1, x_2 \in E'$ tels que

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{et} \qquad y_2 = f(x_2)$$

Par suite,
$$\lambda y_1 - y_2 = \lambda f(x_1) - f(x_2) = f(\lambda x_1 - x_2)$$

en utilisant la linéarité de f. Or, E' est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda x_1 - x_2$ s'y trouve. Il s'ensuit que $\lambda y_1 - y_2$ appartient à $f(E')$. Ce qui achève de montrer que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de F.

À présent, soit F' un sous-espace vectoriel de F. On rappelle que

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$$

Bien entendu, $f^{-1}(F')$ contient 0 puisque $f(0) = 0 \in F'$. Puis on se donne x_1 et x_2 dans $f^{-1}(F')$, ainsi que λ un scalaire. On a

$$f(\lambda x_1 - x_2) = \lambda f(x_1) - f(x_2)$$

Puisque $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à F' et que ce dernier est un espace vectoriel, on voit que $f(\lambda x_1 - x_2)$ appartient à F'. Autrement dit, $\lambda x_1 - x_2$ est dans $f^{-1}(F')$, qui est donc un sous-espace de E. □

Proposition 2.2.10
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$*.*

1. f *est injective si et seulement si Ker* $f = \{0\}$*.*
2. f *est surjective si et seulement si Im* $f = F$*.*

Preuve : La deuxième proposition est une tautologie. Pour la première, supposons f injective. Comme $f(0) = 0$, 0 est l'unique antécédent de 0. C'est-à-dire que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Réciproquement, si cette proposition est satisfaite, montrons que f est injective. Soient x et y dans E, tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$$

donc $x - y$ appartient au noyau de f. Ce dernier est réduit à $\{0\}$ donc $x - y = 0$. Ou encore $x = y$. f est injective. □

Théorème 2.2.11
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Tout supplémentaire de* Ker f *est isomorphe à* Im f.

Preuve : L'énoncé fait plus peur qu'il ne le devrait... On se donne G un supplémentaire de Ker f, de sorte que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ et on pose

$$\forall x \in \mathrm{G} \qquad b(x) = f(x)$$

On définit ainsi une application $b : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$, qui se comporte exactement comme f sur G. Du coup, il est clair que b est linéaire. Montrons qu'elle est bijective. D'une part

$$\mathrm{Ker}\, b = \{x \in \mathrm{G} \mid b(x) = 0\} = \{x \in \mathrm{G} \mid f(x) = 0\} = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{G} = \{0\}$$

D'après la **proposition 2.10**, b est injective.

Puis on se donne $y \in \mathrm{Im}\, f$ et on montre qu'il est atteint par b. Par définition de Im f, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$. Puis, comme Ker f et G sont supplémentaires, x peut être décomposé sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{avec} \qquad x_1 \in \mathrm{Ker}\, f \qquad \text{et} \qquad x_2 \in \mathrm{G}$$

Donc
$$y = f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{=0} + f(x_2) = f(x_2) = b(x_2)$$

et
$$y \in \mathrm{Im}\, b$$

D'après la **proposition 2.10**, b est surjective. G et Im f sont isomorphes. □

2.2.3 Formes linéaires

Définition 2.2.12
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un sous-espace de E est appelé *hyperplan* si, et seulement si, il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 2.2.13
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* H *un hyperplan. Il existe* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\, x_0$. *En d'autres termes, tout hyperplan admet des supplémentaires, dont au moins un est une droite.*

Preuve : Soit H un hyperplan. D'après la **définition 2.12**, il existe une forme linéaire non nulle f sur E, telle que $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\, f$.

Comme f n'est pas nulle, il existe $x_0 \in \mathrm{E}$, tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à diviser x_0 par $f(x_0)$, on peut supposer que $f(x_0) = 1$. Montrons que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Vect}\, x_0$$

D'une part, on montre que la somme est directe. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Vect}\, x_0$, on a d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part, x est proportionnel à x_0. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $x = \lambda x_0$. Et on a

$$0 = f(x) = f(\lambda x_0) = \lambda f(x_0) = \lambda$$

d'où
$$x = \lambda x_0 = 0$$

Puis on montre que la somme directe de ces deux sous-espaces est E. Il suffit d'observer

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad x = f(x)x_0 + \big(x - f(x)x_0\big)$$

Le vecteur $f(x)x_0$ appartient à $\mathrm{Vect}\, x_0$ tandis que $x - f(x)x_0$ est dans $\mathrm{Ker} f$ puisque

$$f\big(x - f(x)x_0\big) = f(x) - f(x)f(x_0) = f(x) - f(x) = 0$$

On a gagné ! □

Proposition 2.2.14
Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E. *Les noyaux de f et g sont égaux si et seulement si f et g sont proportionnelles.*

Preuve : Il est clair que si f et g sont proportionnelles, leurs noyaux sont les mêmes : le coefficient de proportionnalité, non nul, ne change pas le fait que $f(x)$ ou $g(x)$ est nul.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker} g$ sont égaux. D'après la **proposition 2.13**, ce sous-espace admet un supplémentaire dirigé par un vecteur x_0 tel que $f(x_0) = 1$. Si $x \in \mathrm{E}$, il se décompose suivant la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Vect}\, x_0$: il existe $y \in \mathrm{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = y + \lambda x_0$$

On a
$$f(x) = f(y) + \lambda f(x_0) = \lambda$$

tandis que
$$g(x) = g(x) + \lambda g(x_0) = \lambda g(x_0) = g(x_0) f(x)$$

On n'oublie pas en effet que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ donc $g(x) = 0$. Comme x était quelconque, on a montré que $g = g(x_0) f$. □

2.2.4 Endomorphismes particuliers

Définition 2.2.15
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit α un scalaire. On appelle homothétie de rapport α l'automorphisme de E défini par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \alpha x$$

Rien à dire sur les homothéties : ce sont les applications linéaires les plus simples possibles – mise-à-part l'application nulle.

Définition 2.2.16
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

On rappelle qu'au **paragraphe 1.6**, on a défini une opération appelée projection sur un sous-espace parallèlement à un autre. Il est temps d'y revenir, de montrer qu'il s'agit d'un projecteur, et de montrer que tout projecteur est une projection.

Rappelons le contexte : on a deux sous-espaces supplémentaires F et G de E. Cela signifie que, si x est un vecteur quelconque de E, il se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un de G. On note respectivement ces vecteurs $p_F x$ et $p_G x$ de sorte que

$$x = p_F(x) + p_G(x) \qquad \text{avec} \qquad p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_G(x) \in G$$

C'est $p_F(x)$ qu'on appelle la projection de x sur F parallèlement à G. Vérifions d'abord que p_F est un endomorphisme de E.

Soient x et y dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$x = p_F(x) + p_G(x) \qquad \text{et} \qquad y = p_F(y) + p_G(y)$$

d'où
$$\lambda x + y = \big(\lambda p_F(x) + p_F(y)\big) + \big(\lambda p_G(x) + p_G(y)\big)$$

On voit qu'on a décomposé $\lambda x + y$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cette décomposition étant unique, et la composante suivant F étant $p_F(\lambda x + y)$, on a

$$p_F(\lambda x + y) = \lambda p_F(x) + p_F(y)$$

Autrement dit, p_F est linéaire.

Montrons qu'il s'agit d'un projecteur. C'est simple : si $x \in E$, on a $p_F(x) = p_F(x) + 0$, qui est une décomposition de $p_F(x)$ suivant F et G. Donc

$$p_F\big(p_F(x)\big) = p_F(x) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p_F^2 = p_F$$

Toute projection est donc un projecteur. Il reste à montrer que ces deux notions coïncident :

Théorème 2.2.17
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* p *un projecteur. C'est la projection sur* Im p *parallèlement à* Ker p*. En outre,* $I - p$ *est la projection sur* Ker p *parallèlement à* Im p*.*

Preuve : Par définition, p est un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$. Le théorème annonce que p est la projection sur Im p parallèlement à Ker p ; cela sous-entend que ces deux sous-espaces sont supplémentaires. Donc commençons par le démontrer. Si $x \in E$, on a

$$x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$$

Bien évidemment, $p(x)$ appartient à Im p ; et $x - p(x)$ appartient à Ker p puisque

$$p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$$

donc
$$E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$$

Le fait que la somme est directe est simple : soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. Puisqu'il est dans l'image de p, il existe $y \in E$ tel que $p(y) = x$. Et comme x est dans le noyau de p, on a

$$0 = p(x) = p^2(y) = p(y) = x$$

Identifions maintenant $I - p$. Bien évidemment, $I - p$ est un endomorphisme de E, comme somme d'endomorphismes de E. De plus,

$$(I - p)^2 = (I - p) \circ (I - p) = I - p - p + p^2 = I - p$$

puisque $p^2 = p$. Donc $I - p$ est un projecteur. D'après ce qui précède, c'est la projection sur $\operatorname{Im}(I - p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(I - p)$. On voit que

$$\operatorname{Ker}(I - p) = \{x \in E \mid (I - p)(x) = 0\} = \{x \in E \mid x - p(x) = 0\} = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Im} p$$

De même $$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{I} - (\mathrm{I} - p)) = \operatorname{Im}(\mathrm{I} - p)$$

$\mathrm{I} - p$ est bien la projection sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$. □

Définition 2.2.18
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces supplémentaires. On appelle symétrie par rapport à G parallèlement à F l'application $s = \mathrm{I} - 2p_{\mathrm{F}}$.

Théorème 2.2.19
Soit E *un espace vectoriel. Soit s une symétrie. s est linéaire et* $s^2 = I$.

Réciproquement, si s est un endomorphisme de E *tel que* $s^2 = \mathrm{I}$, *s est la symétrie par rapport à Ker*$(s - \mathrm{I})$, *parallèlement à Ker*$(s + \mathrm{I})$.

Preuve : On commence par la première partie. On se donne une symétrie s ; c'est-à-dire que l'espace est décomposé comme somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et on a $s = \mathrm{I} - 2p_{\mathrm{F}}$. Dans la mesure où p_{F} est un endomorphisme de E, d'après ce qui a été vu sur les projecteurs, s est également un endomorphisme. En outre, $p_{\mathrm{F}}^2 = p_{\mathrm{F}}$ donc
$$s^2 = (\mathrm{I} - 2p_{\mathrm{F}})^2 = \mathrm{I} - 2p_{\mathrm{F}} - 2p_{\mathrm{F}} + 4p_{\mathrm{F}}^2 = \mathrm{I}$$
ce qui prouve la première partie du théorème.

Réciproquement, on suppose que s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{I}$. Le théorème annonce qu'il s'agit de la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{I})$, parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$. Donc une première chose à vérifier est que ces sous-espaces sont supplémentaires. On commence par remarquer que si x est un vecteur quelconque,
$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

Or, $$\frac{x + s(x)}{2} \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{I})$$

puisque $$\begin{aligned}(s - \mathrm{I})(x + s(x)) &= s(x + s(x)) - (x + s(x)) \\ &= s(x) + \underbrace{s^2(x)}_{=x} - x - s(x) = 0\end{aligned}$$

De même $$\frac{x - s(x)}{2} \in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$$
donc on a déjà montré que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{I}) + \operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$ et il reste à voir que la somme est directe. Soit $x \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{I}) \cap \operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$. On a donc
$$s(x) - x = 0 \qquad \text{et} \qquad s(x) + x = 0$$

d'où $$2x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0$$

On a montré $$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{I}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$$

Reste à montrer que s est bien la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{I})$, parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$. Pour cela, on regarde la **définition 2.18** : il suffit d'établir que $s = \mathrm{I} - 2p$, où p est la projection sur $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{I})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{I})$. On montre que ces deux applications coïncident en tout point. Soit x un élément de E. Il se décompose de manière unique suivant notre somme directe : il existe $x_1 \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{I})$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{I})$, uniques, tels que $x = x_1 + x_2$.

Par définition de p, on a d'ailleurs $x_2 = p(x)$. De plus, par définition de x_1 et x_2,

$$(s - \mathrm{I})(x_1) = 0 \qquad \text{donc} \qquad s(x_1) = x_1$$

et
$$(s + \mathrm{I})(x_2) = 0 \qquad \text{donc} \qquad s(x_2) = -x_2$$

Par conséquent,
$$s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2 = \underbrace{x_1 + x_2}_{=x} - 2x_2 = x - 2p(x)$$

et on a $s = \mathrm{I} - 2p$, comme annoncé. □

2.2.5 Équations linéaires

Définition 2.2.20
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $b \in \mathrm{F}$. *Résoudre l'équation linéaire* « $f(x) = b$ », c'est déterminer l'ensemble $\{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = b\}$.

> Il est clair que l'équation « $f(x) = b$ » n'a des chances d'admettre des solutions que si $b \in \operatorname{Im} f$. D'où l'intérêt de savoir déterminer cet ensemble.

Proposition 2.2.21
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soient* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $b \in \mathrm{F}$. *On suppose avoir trouvé* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $f(x_0) = b$. *L'ensemble des solutions de l'équation* « $f(x) = b$ » *est*

$$\{x_0 + y \mid y \in Ker f\}$$

Preuve : On note

$$\mathscr{S} = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = b\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{S}' = \{x_0 + y \mid y \in \operatorname{Ker} b\}$$

et il s'agit de montrer que ces ensembles sont égaux. On prend d'abord un élément x de $\mathscr{S}'$. Il existe $y \in \operatorname{Ker} f$ tel que $x = x_0 + y$ et il s'ensuit que $x \in \mathscr{S}$ puisque

$$f(x) = f(x_0 + y) = \underbrace{f(x_0)}_{=b} + \underbrace{f(y)}_{=0} = b$$

Réciproquement, soit $x \in \mathscr{S}$. On a

$$f(x) = b \qquad \text{et} \qquad f(x_0) = b$$

donc
$$f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0$$

et il s'ensuit que $y = x - x_0$ appartient à $\operatorname{Ker} f$. Et on a bien $x = x_0 + y$. □