Espaces Vectoriels

La lettre $\mathbb{K}$ désigne toujours un corps commutatif. Pour les exercices **12** et **13**, on suppose que $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$.

1 Déterminez si chacun des ensembles suivant est un espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$:

1. Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont distinctes.
2. Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont la première et la deuxième coordonnée sont égales ;
3. $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 = z_2\}$;
4. L'ensemble des fonctions à valeurs complexes, dérivables sur $[0;1]$, valant 0 en 0 et dont la dérivée en $1/2$ vaut 0 ;
5. L'ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur $[0;1]$, dont la dérivée en $1/2$ vaut 1 ;
6. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à 3, dont les dérivées première et seconde sont nulles en 0 ;
7. L'ensemble des fonctions continues sur $[-1;1]$ d'intégrale nulle sur cet intervalle ;
8. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

2 Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

3 Donner une partie génératrice de $\mathbb{C}^3$, la plus simple possible, en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, puis en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4 Soit A la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = x_4^2 + 1\}$$

Soit B la partie de $\mathbb{R}^4$ constituée des vecteurs $(-3,2,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. On pose

$$F = \mathrm{Vect}\,A \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\,B$$

Montrer que $F \subset G$.

5 Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que

1. $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}\,g)$;
2. $\mathrm{Ker}\,f \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$;
3. $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,g$.

6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que s'ils commutent, le noyau et l'image de f sont stables par g.

7 Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E, telles que

$$\forall x \in E \qquad f(x)g(x) = 0$$

Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

8 Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x) = x \wedge u$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une injection ? Une surjection ? Trouver une relation entre f et f^3.

9 Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les noyaux de f et f^2 sont égaux si et seulement si $\mathrm{Im}\,f$ et $\mathrm{Ker}\,f$ sont en somme directe. Puis montrer que $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Im}\,f^2$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f$.

10 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, continues en 0. Soit Φ l'application de E dans lui-même qui à tout f de E associe la fonction $\Phi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(f)(x) = f(x) + f(2x)$$

Montrer que Φ est injective.

11 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit W un sous-espace de E ; on considère :

$$\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid W \subset \mathrm{Ker}\,u\}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.

12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_0 un sous-espace strict. f est un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E \setminus E_0 \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(x) = \lambda x$$

Montrer que f est une homothétie.
Indication : Montrer que le λ associé à chaque x est unique, ce qui définit une application $x \longmapsto \lambda(x)$ sur $E \setminus E_0$. Montrer que $\lambda(x) = \lambda(y)$ si x et y sont dans $E \setminus E_0$, d'abord dans le cas où ils sont proportionnels, puis dans le cas où ils ne le sont pas. Conclure.

13 Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tout automorphisme de E.

1. Soient $g \in \mathscr{GL}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$, tels que $g(x) = x$. Montrer que $g \circ f(x) = f(x)$.
2. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{GL}(E)$, tel que

$$\forall y \in E \qquad g(y) = y \iff y \in \mathrm{Vect}\,x$$

Indication : On peut penser à une symétrie et utiliser le fait que tout sous-espace admet des supplémentaires.

3. En déduire que f vérifie la propriété de l'exercice 12. Conclure.

14 On définit

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (-x\sqrt{2} + z, y\sqrt{2} + z, x + y)$$

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{I})$ et $\operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{I})$.
4. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{I}) \oplus \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{I})$ et $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
5. f est-il un projecteur ?

15 Dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ (fonctions continues sur $\mathbb{R}$), on considère

$$\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel ; plus précisément, qu'il s'agit d'un hyperplan. En trouver un supplémentaire.

16 Identifier les applications linéaires suivantes (symétrie ? projection ?) :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = (y, x) \qquad \text{et} \qquad g(x, y) = (-y, -x)$
2. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (z, -x + y + z, z)$
3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (-x + 2z, -2x + y + 2z, z)$

17 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère les sous-espaces suivants :

$$\mathrm{F} = \operatorname{Vect}\big((2,1,0);(1,0,2)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G} = \operatorname{Vect}\big((2,2,-5)\big)$$

Après avoir montré que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, donner l'expression analytique des projections sur F parallèlement à G, sur G parallèlement à F et de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

18 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E. On pose $q = f + g - gf$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $fg = 0$.
2. On suppose que f et g sont des projecteurs, tels que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. Montrer que
   - q est un projecteur ;
   - $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$;
   - $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et p un projecteur. Montrer que $fp = pf$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par f.