

Chapitre 3

Espaces Vectoriels de Dimension Finie

Comme toujours, \mathbb{K} est un corps commutatif et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

3.1 Notion de dépendance linéaire

3.1.1 Rappel : sous-espace engendré

On rappelle que si E un \mathbb{K} -espace vectoriel et si A est une partie de E , le sous-espace engendré par A , noté $\text{Vect}A$, est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .

C'est aussi l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A . Par suite, si A est une famille finie non vide $A = \{e_1, \dots, e_n\}$ de vecteurs de E , on a

$$\text{Vect}A = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \quad (1)$$

L'objet de ce chapitre est d'étudier les espaces vectoriels qui peuvent être engendrés par une partie finie. Ceux-ci sont particulièrement intéressants puisque, d'après la relation (1), leurs éléments peuvent être décrits à partir d'un nombre fini de vecteurs.

Une première chose à faire est de voir comment on peut affiner cette description. Par exemple, il est clair que si A contient le vecteur nul, ce dernier ne contribue rien à $\text{Vect}A$. Ou bien, si e_1 et e_2 sont dans A , alors $B = A \cup \{e_1 + e_2\}$ va engendrer le même sous-espace que A .

3.1.2 Familles libres et liées

Définition 3.1.1

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille non vide de E . On dit que \mathcal{F} est *libre*, ou encore que e_1, \dots, e_n sont *linéairement indépendants*, si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

On dira que \mathcal{F} est *liée*, ou encore que e_1, \dots, e_n sont *linéairement dépendants*, si et seulement si elle n'est pas libre :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$$

Exemple 3.1.2

1. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . On suppose qu'elle contient le vecteur nul, c'est-à-dire qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $e_i = 0$. Alors \mathcal{F} est liée : en effet, posons

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 26.92 & \text{si } k = i \end{cases}$$

Alors
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \lambda_i e_i = 0$$

tandis que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$.

2. Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre. En effet, soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k = 0$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Donc

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$$

3. Toute base de $\vec{\mathcal{E}}$ est libre. En effet, soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une famille de 3 vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$. On suppose cette famille liée. Il existe des réels α, β et γ , non tous nuls, tels que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$$

On peut suppose que c'est γ qui n'est pas nul. De sorte qu'on ait

$$\vec{w} = -\frac{\alpha}{\gamma} \vec{u} - \frac{\beta}{\gamma} \vec{v}$$

On voit que \vec{w} est combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires et ne constituent donc pas une base.

4. Soit (e_1, e_2) une famille de deux vecteurs de E . Si elle est liée, il existe des scalaires λ_1 et λ_2 dont l'un des deux (par exemple λ_1) n'est pas nul tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$$

d'où
$$e_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e_2$$

On voit donc que e_1 et e_2 sont proportionnels.

Les exemples 3 et 4 nous amènent à dire que deux vecteurs liés sont *colinéaires* et que trois vecteurs liés sont *coplanaires*.

Le théorème suivant est fondamental pour la suite : il nous confirme qu'une famille liée comporte des vecteurs redondants dans la description du sous-espace vectoriel qu'elle engendre : qu'ils soient là ou qu'on les retire, le sous-espace engendré sera le même. On en profite pour ajouter des propriétés élémentaires de ces nouvelles notions de dépendance linéaire.

Théorème 3.1.3

1. Soit \mathcal{F} une famille liée de vecteurs de E . Alors l'un des vecteurs qui la composent est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire que

$$\exists e \in \mathcal{F} \quad e \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{e\})$$

De plus, \mathcal{F} et $\mathcal{F} \setminus \{e\}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E .

2. Soient \mathcal{F} une famille libre et $e \in E$. La famille $\mathcal{F} \cup \{e\}$ est libre si et seulement si e n'est pas dans le sous-espace engendré par \mathcal{F} .
3. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Preuve : Traitons les points un par un :

1. Puisque \mathcal{F} est finie, on peut énumérer ses éléments : $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme elle est liée, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$$

Il existe i tel que $\lambda_i \neq 0$ et on a donc

$$e_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_i} e_k \tag{2}$$

e_i est une combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{F} .

Comme $\mathcal{F} \setminus \{e_i\}$ est inclus dans \mathcal{F} , on a déjà

$$\text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{e_i\}) \subset \text{Vect} \mathcal{F}$$

Maintenant, si on se donne $x \in \text{Vect} \mathcal{F}$, on sait que x est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} . Donc il existe des scalaires x_1, \dots, x_n tels que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

Mais on sait qu'on peut remplacer e_i par l'expression (2) donc

$$x = x_i e_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k e_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(x_k - \frac{x_i \lambda_k}{\lambda_i} \right) e_k$$

et on voit que $x \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{e_i\})$.

2. Soient $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre et $e \in E$. On suppose d'abord que e se trouve dans le sous-espace engendré par \mathcal{F} . Alors e est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad e = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

Par suite, $\mathcal{F} \cup \{e\}$ est liée puisqu'on a une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls :

$$e - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$$

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F} \cup \{e\}$ est liée. Alors

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \quad \lambda e + \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$$

Il est exclu que λ soit nul : en effet, si c'était le cas, la liberté de \mathcal{F} impliquerait que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont également nuls ce qui contredit la ligne précédente. Comme $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$e = - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} e_k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

On a donc montré que $\mathcal{F} \cup \{e\}$ est liée si et seulement si e appartient à $\text{Vect} \mathcal{F}$. C'est la contre-aposée de notre proposition.

3. C'est trivial. □

3.1.3 Bases

Définition 3.1.4

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . On dit que c'est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E .

Théorème 3.1.5

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de vecteurs de E . C'est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Preuve : Notons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Cet espace est engendré par la famille libre (e_1, \dots, e_n) ; d'après la **définition 1.4**, c'est une base de F . \square

Théorème 3.1.6

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . Elle est libre si et seulement si

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow E \quad \text{est injective}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

Preuve : f est clairement linéaire. On sait alors qu'elle est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$. Donc on étudie $\text{Ker } f$:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0\} \\ &= \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0 \right\} \end{aligned}$$

D'après la **définition 1.1**, $\text{Ker } f = \{0\}$ si et seulement si \mathcal{F} est libre. \square

Théorème 3.1.7

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . Elle engendre E si et seulement si

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

est surjective.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du fait que le sous-espace engendré par \mathcal{F} est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de cette famille. \square

Corollaire 3.1.8

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . C'est une base de E si et seulement si

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve : f est clairement linéaire. Et d'après les **théorèmes 1.6** et **1.7**, elle est bijective si et seulement si \mathcal{F} est libre et génératrice. \square

Voici une propriété des bases que nous avons déjà rencontrée dans les cours de géométrie du plan et de l'espace.

Corollaire 3.1.9

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Preuve : Soit $x \in E$. Comme l'application f du **corollaire 1.8** est bijective, il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, tel que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

Donc x se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. □

Définition 3.1.10

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si $x \in E$, l'unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

est appelé système de coordonnées de x dans la base \mathcal{B} et on note

$$[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$$

Corollaire 3.1.11

Soit \mathcal{B} une base de E . L'application

$$\begin{aligned} g: E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto [x]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve : g est la bijection réciproque de l'application f définie au **corollaire 1.8**. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels, puisqu'on sait du cours d'introduction à l'algèbre linéaire que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire. □

Exemple 3.1.12

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on observe que e_i est égal à une fois lui-même, plus zéro fois les autres vecteurs de \mathcal{B} . Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad [e_i]_{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

↑
i-ème position

Théorème 3.1.13

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit F un autre \mathbb{K} -espace vectoriel, soit (f_1, \dots, f_n) une famille de vecteurs de F . Il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u e_i = f_i$$

Preuve : Si x est un vecteur quelconque de E , on convient de noter (x_1, \dots, x_n) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . On définit alors

$$\forall x \in E \quad u(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$$

D'après l'**exemple 1.12**, pour tout i compris entre 1 et n , $[e_i]_{\mathcal{B}}$ a toutes ses coordonnées nulles sauf la i -ème qui vaut 1. Donc

$$u(e_i) = f_i$$

Montrons que u est linéaire. Soient x, y dans E et λ dans \mathbb{K} . D'après le **corollaire 1.11**,

$$\begin{aligned} [\lambda x + y]_{\mathcal{B}} &= \lambda [x]_{\mathcal{B}} + [y]_{\mathcal{B}} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (y_1, \dots, y_n) \\ &= (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n) \end{aligned}$$

donc
$$u(\lambda x + y) = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k) f_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k f_k + \sum_{k=1}^n y_k f_k = \lambda u(x) + u(y)$$

ce qui montre que $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Vérifions maintenant l'unicité de cette application. Soit $v \in \mathcal{L}(E, F)$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad v(e_i) = f_i$$

Alors
$$\forall x \in E \quad v(x) = v\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k v(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k f_k = u(x)$$

d'où

$$v = u$$

□

3.2 Dimension d'un espace vectoriel

3.2.1 Existence de bases

Définition 3.2.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit qu'il est *de dimension finie* si et seulement si E est engendré par une partie finie.

Remarquez comme on définit ce que signifie *être de dimension finie*, mais on ne dit pas (du moins pas encore) ce qu'est la dimension d'un tel espace.

A priori, on aimerait naïvement dire qu'il s'agit du cardinal d'une partie génératrice finie. Mais on s'aperçoit immédiatement que cette définition n'aurait aucun sens : il y a des tas de parties génératrices de E . Il peut y en avoir une qui comporte 17 éléments et une autre qui en comporte 666. Du coup, dira-t-on que notre espace est de dimension 17 ou 666 ?

Notre stratégie est en fait la suivante. On montre qu'un espace de dimension finie admet des bases. Et que par miracle (les mathématiciens appellent plutôt cela un lemme) toutes ces bases ont le même cardinal. C'est celui-ci qu'on appellera dimension de l'espace.

On rappelle qu'une base est une partie de E , à la fois libre et génératrice. Donc une partie de E n'est pas une base si elle n'est pas libre, ou si elle n'est pas génératrice.

Théorème 3.2.2

Tout espace vectoriel, non réduit à $\{0\}$, de dimension finie admet des bases.

Preuve : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, n'admettant pas de base.

Comme E est de dimension finie, il admet une partie génératrice finie : il existe $\mathcal{F} \subset E$, de cardinal $n > 0$, tel que $E = \text{Vect } \mathcal{F}$.

On définit, pour tout entier p , la propriété $\mathcal{P}(p)$: « E peut être engendré par $n - p$ vecteurs. »

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque E est engendré par \mathcal{F} qui a pour cardinal $n - 0$.
- \mathcal{P} est héréditaire : soit p un entier inférieur à $n - 2$. On suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Il existe donc $\mathcal{A} \subset E$, de cardinal $n - p$, engendrant E . Comme E n'admet pas de base, \mathcal{A} est liée. D'après le **théorème 1.3**, il existe $e \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} \setminus \{e\}$ engendre E . Mais $\mathcal{A} \setminus \{e\}$ a pour cardinal $n - p - 1 = n - (p + 1)$. Donc $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.

Puisque $\mathcal{P}(n - 1)$ est vraie, E peut être engendré par un seul vecteur. Donnons-nous un vecteur générateur x de E . Comme la famille constituée seulement de x n'est pas une base, elle est liée. Donc il existe $\lambda \neq 0$, tel que $\lambda x = 0$. Donc $x = 0$ et

$$E = \text{Vect}(0) = \{0\}$$

Par contre-apposée, un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, admet des bases. \square

3.2.2 Le lemme fondamental

Lemme 3.2.3

Soient n et p deux entiers non nuls. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux familles de vecteurs de E , de cardinaux respectifs $n + p$ et n . Si tout vecteur de \mathcal{A} est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} , alors \mathcal{A} est liée.

Preuve : On démontre cela par récurrence. On définit, pour tout entier n non nul, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux parties de E , de cardinaux respectifs $n + 1$ et n , telles que tout vecteur de \mathcal{A} est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} . Alors \mathcal{A} est liée. »

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie : on se donne $\mathcal{A} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathcal{B} = \{u\}$ deux parties de E , de cardinaux respectifs 2 et 1. Et on suppose que e_1 et e_2 sont tous deux combinaison linéaire de u : il existe des scalaires λ_1 et λ_2 tels que

$$e_1 = \lambda_1 u \quad \text{et} \quad e_2 = \lambda_2 u$$

Évidemment, si λ_1 ou λ_2 est nul, \mathcal{A} est liée puisqu'elle contient le vecteur nul. Donc on suppose ces scalaires non nuls et on a

$$\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2 = 0$$

ce qui montre que \mathcal{A} est liée.

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$: Soit n un entier non nul, tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On se donne

$$\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_{n+2}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$$

deux parties de E , de cardinaux respectifs $n + 2$ et $n + 1$, telles que tout vecteur de \mathcal{A} soit combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} . Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; n + 2 \rrbracket \quad \exists (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \quad e_i = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{i,j} u_j$$

Si tous les scalaires $\lambda_{1,n+1}, \dots, \lambda_{n+2,n+1}$ sont nuls, alors e_1, \dots, e_{n+2} sont en fait, chacun, combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n . D'après $\mathcal{P}(n)$, (e_1, \dots, e_{n+1}) est liée et par suite \mathcal{A} est liée aussi.

Ce cas ayant été traité, on suppose maintenant qu'un de ces scalaires n'est pas nul. Quitte à renommer tous nos vecteurs, on peut supposer que $\lambda_{n+2,n+1} \neq 0$. Et on a donc

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \quad e_i - \frac{\lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} e_{n+2} &= \sum_{j=1}^{n+2} \lambda_{i,j} u_j - \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\lambda_{n+2,j} \lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} u_j \\ &= \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\lambda_{i,j} \lambda_{n+1,n+2} - \lambda_{n+2,j} \lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} u_j \end{aligned}$$

On remarque en particulier que le $n+2$ -ème terme de cette somme est nul d'où

$$\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \quad e_i - \frac{\lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} e_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\lambda_{i,j} \lambda_{n+1,n+2} - \lambda_{n+2,j} \lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} u_j$$

Les vecteurs du membre de gauche sont au nombre de $n+1$; et ils sont, chacun, combinaison linéaire des n vecteurs u_1, \dots, u_n . D'après $\mathcal{P}(n)$, ils sont liés : il existe des scalaires μ_1, \dots, μ_{n+1} , non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \left(e_i - \frac{\lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} e_{n+1} \right) = 0$$

Après avoir développé tout cela, il vient

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i \lambda_{i,n+2}}{\lambda_{n+1,n+2}} \right) e_{n+1} = 0$$

On obtient une combinaison linéaire nulle des vecteurs de \mathcal{A} ; et au moins un des coefficients de cette combinaison n'est pas nul, puisque l'un des $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ n'est pas nul. Donc \mathcal{A} est liée et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n non nul.

Ainsi, si n est un entier, toute famille de $n+1$ vecteurs, qui sont chacun combinaison linéaire de n mêmes vecteurs, sont liés. Le lemme s'en déduit immédiatement. \square

3.2.3 Existence de la dimension

Théorème 3.2.4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve : On sait, d'après le **théorème 2.2**, que E admet des bases. Soit \mathcal{B} l'une d'elles, dont on note n le cardinal. Soit \mathcal{B}' une autre base.

Supposons que $|\mathcal{B}'| > n$. Comme \mathcal{B}' engendre E , les n vecteurs de \mathcal{B} sont, chacun, combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}' . D'après le **lemme 2.3**, \mathcal{B} est liée et on a une contradiction.

De même, si $|\mathcal{B}'| < n$, c'est \mathcal{B}' qui est liée ce qui contredit le fait que c'est une base.

Par conséquent, $|\mathcal{B}'| = n$: toute base de E a pour cardinal n . \square

Définition 3.2.5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie. Le cardinal commun de toutes les bases de E est appelé *dimension* de E . Par convention, l'espace vectoriel nul est de dimension 0.

Exemple 3.2.6

1. On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur à n . Il est donc engendré par $(1, X, \dots, X^n)$. On a vu dans l'**exemple 1.2** que $(1, X, \dots, X^n)$ cette famille est libre. C'est donc une base de cet espace, qui est donc de dimension $n+1$.

2. On considère \mathbb{K}^n , dont on sait qu'il s'agit d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, définie par

$$\forall i \in [1; n] \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

\uparrow
i-ème position

est clairement libre et génératrice de \mathbb{K}^n . Donc \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Les $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont appelés *base canonique* de \mathbb{K}^n .

Théorème 3.2.7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E , avec $|\mathcal{F}| = p$.

Si elle est génératrice, on a $p \geq n$, avec égalité si et seulement si c'est une base de E .

Si elle est libre, on a $p \leq n$, avec égalité si et seulement si c'est une base de E .

Preuve : On suppose \mathcal{F} génératrice et on définit

$$A = \{ |\mathcal{F}'| \mid \mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F}' \text{ génératrice de } E \}$$

Évidemment, A n'est pas vide puisqu'il contient l'entier p , qui est le cardinal de \mathcal{F} , qui est génératrice de E par hypothèse. Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément ; posons $q = \text{Min}A$. Il existe donc une sous-famille \mathcal{F}' de \mathcal{F} , de cardinal q , génératrice de E .

Si \mathcal{F}' est liée, on sait d'après le **théorème 1.3** qu'il existe $e \in \mathcal{F}'$ tel que $\mathcal{F}' \setminus \{e\}$ engendre le même sous-espace que \mathcal{F}' , c'est-à-dire E . Ceci implique que $q - 1$ appartient à A , ce qui contredit la définition de q . Par suite, \mathcal{F}' est libre et génératrice de E : c'en est une base et on a donc $q = n$, d'après le **théorème 2.4**. Or, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ donc $n = q \leq p$.

Si on suppose qu'il y a égalité, $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}|$; d'après le cours sur les ensembles finis, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Donc \mathcal{F} est une base de E .

On passe à la deuxième partie du théorème. Supposons que \mathcal{F} est libre. Si $p > n$, le **lemme 2.3** implique que \mathcal{F} est liée, puisque ses éléments sont, chacun, combinaison linéaire de n vecteurs formant une base de E . D'où $p \leq n$.

Enfin, on suppose qu'il y a égalité. Si \mathcal{F} n'est pas génératrice, il existe $x \in E$ qui ne soit pas dans $\text{Vect } \mathcal{F}$. D'après le **théorème 1.3**, $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est une famille libre, de cardinal $n + 1$, ce qui contredit le fait que E est de dimension n . Ainsi, \mathcal{F} est aussi génératrice : c'est une base de E . □

3.2.4 Sous-espaces des espaces de dimension finie

Théorème 3.2.8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Preuve : Si E ou F est réduit à $\{0\}$, le théorème est trivial. On suppose donc que E est de dimension $n > 0$ et que F est un sous-espace de E , non réduit à $\{0\}$. Soit \mathcal{B} une base de E .

On considère l'ensemble \mathcal{F} de toutes les familles libres d'éléments de F . D'abord, \mathcal{F} n'est pas vide puisque si x est un élément non nul de F , la famille (x) est libre. Ensuite, si \mathcal{L} est une famille libre d'éléments de F , son cardinal est inférieur à n : en effet, si $|\mathcal{L}| > n$, les vecteurs de \mathcal{L} sont, chacun, combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} , puisque \mathcal{B} engendre E ; d'après le **lemme 2.3**, \mathcal{L} est liée, ce qui est exclu. On a donc

$$\forall \mathcal{L} \in \mathcal{F} \quad |\mathcal{L}| \leq n$$

Par suite, l'ensemble $\{|\mathcal{L}| \mid \mathcal{L} \in \mathcal{F}\}$ est inclus dans \mathbb{N} , non vide, majoré par n . Il admet donc un plus grand élément, qu'on note p . Et par définition de p , il existe une famille libre $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ d'éléments de F .

On suppose que \mathcal{L} n'engendre pas F . Alors il existe $x \in F$, qui ne soit pas combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_n) . Mais du coup, la famille (e_1, \dots, e_n, x) est libre, de cardinal $p + 1$. Ce qui contredit la définition de p , comme plus grand cardinal d'une famille libre d'éléments de F : \mathcal{L} engendre F .

Par suite, \mathcal{L} est libre, génératrice de F : c'est une base de F , qui est donc de dimension finie égale à $|\mathcal{L}| = p \leq n$.

Maintenant, si on suppose qu'il y a égalité, c'est-à-dire que $p = n$. Comme \mathcal{L} est libre, le **théorème 2.7** implique que c'est une base de E . Comme c'était déjà une base de F , on en déduit que $F = E$. □

Lemme 3.2.9

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit (f_1, \dots, f_p) une famille libre de vecteurs de E , avec $p < n$. Il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que (f_1, \dots, f_p, e_i) soit libre.

Preuve : C'est trivial. On suppose que ce n'est pas le cas. Alors chaque e_i est combinaison linéaire de (f_1, \dots, f_p) , et le **lemme 2.3** implique que \mathcal{B} est liée : contradiction. □

Lemme 3.2.10

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles libres de vecteurs de E . $\text{Vect}\mathcal{F}$ et $\text{Vect}\mathcal{G}$ sont en somme directe si et seulement si $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre. Dans ce cas, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $\text{Vect}\mathcal{F} \oplus \text{Vect}\mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$.

Preuve : Donnons des noms aux éléments de \mathcal{F} et \mathcal{G} en posant :

$$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p) \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = (f_{p+1}, \dots, f_m)$$

On note aussi $F = \text{Vect}\mathcal{F}$ et $G = \text{Vect}\mathcal{G}$

Supposons $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ libre. Soit $x \in F \cap G$. Alors

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad x = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k$$

et
$$\exists (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m-p} \quad x = - \sum_{k=p+1}^m \lambda_k f_k$$

d'où
$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k + \sum_{k=p+1}^m \lambda_k f_k = 0$$

Mais la famille (f_1, \dots, f_m) est libre donc les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont nuls. D'où $x = 0$ et $F \cap G = \{0\}$: ces sous-espaces sont en somme directe.

Réciproquement, si $F \cap G = \{0\}$, montrons que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre. On se donne une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$: soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$, tel que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k f_k = 0$$

Alors
$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = - \sum_{k=p+1}^m \lambda_k f_k$$

Notons x ce vecteur ; d'après l'expression du membre de gauche, x appartient à F . Et d'après celle du membre de droite, x appartient à G . Par conséquent, $x = 0$. D'où

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p+1}^m \lambda_k f_k = 0$$

Comme \mathcal{F} et \mathcal{G} sont libres, on obtient

$$\forall k \in [[1; p]] \quad \lambda_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [[p+1; m]] \quad \lambda_k = 0$$

Donc tous les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont nuls et $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre.

Montrons la dernière partie du théorème. On suppose $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ libre et on note H le sous-espace qu'elle engendre. Il est clair que $F \oplus G$ contient H , puisque H est le plus petit sous-espace de E contenant \mathcal{F} et \mathcal{G} .

Et il est également clair que H contient $F \oplus G$. En effet, H est un sous-espace contenant \mathcal{F} donc contient le sous-espace engendré par \mathcal{F} ; de même, H contient G . Donc H contient $F \cup G$ et contient donc $F \oplus G$. D'où $H = F \oplus G$. Par suite, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une partie libre, génératrice de $F \oplus G$: c'en est une base. □

Corollaire 3.2.11

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G des sous-espaces. Ils sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G$$

De plus, si F et G sont supplémentaires dans E , on a

$$\dim G = \dim E - \dim F$$

Preuve : Comme F et G sont de dimensions finies, d'après le **théorème 2.8**, ils admettent chacun des bases. Notons \mathcal{F} et \mathcal{G} des bases de F et G . On a

$$\dim F = |\mathcal{F}| \quad \text{et} \quad \dim G = |\mathcal{G}|$$

donc
$$\dim F + \dim G = |\mathcal{F}| + |\mathcal{G}|$$

Supposons que F et G sont en somme directe. D'après le **lemme 2.10**, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base $F \oplus G$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Donc

$$\dim(F \oplus G) = |\mathcal{F} \cup \mathcal{G}| = |\mathcal{F}| + |\mathcal{G}| = \dim F + \dim G$$

Réciproquement, si la relation

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G$$

est satisfaite, on a

$$\dim(F + G) = |\mathcal{F}| + |\mathcal{G}|$$

Or, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ engendre $F + G$ donc d'après le **théorème 2.7**,

$$\dim(F + G) \leq |\mathcal{F} \cup \mathcal{G}|$$

Donc
$$|\mathcal{F}| + |\mathcal{G}| \leq |\mathcal{F} \cup \mathcal{G}| = |\mathcal{F}| + |\mathcal{G}| - |\mathcal{F} \cap \mathcal{G}|$$

et il s'ensuit que

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| = 0$$

Donc, finalement

$$\dim(F + G) = |\mathcal{F} \cup \mathcal{G}|$$

Autrement dit, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $F + G$; elle est libre, toujours d'après le **théorème 2.7**. D'après le **lemme 2.10**, F et G sont en somme directe.

Maintenant, si F et G sont supplémentaires dans E , on a $E = F \oplus G$. Donc

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

et

$$\dim G = \dim E - \dim F$$

□

Concrètement, ce théorème nous dit que si F et G sont en somme directe dans un espace de dimension finie, on obtient une base de $F \oplus G$ en réunissant une base de F et une base de G .

Théorème 3.2.12 (Théorème de l'échange)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit F un sous-espace strict de E , de dimension $p < n$, dont une base est (f_1, \dots, f_p) . Il existe $i_1, \dots, i_{n-p} \in \llbracket 1; n \rrbracket$, tels que $(f_1, \dots, f_p, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}})$ soit une base de E .

Preuve : On applique le lemme : il existe $i_1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $(f_1, \dots, f_p, e_{i_1})$ soit libre. Si $p + 1 = n$, cette famille est une base de E et on a fini. Sinon, $p + 1 < n$ et d'après le lemme, il existe $i_2 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $(f_1, \dots, f_p, e_{i_1}, e_{i_2})$ soit libre. Si $p + 2 = n$, c'est une base de E et on a fini. Sinon, $p + 2 < n$ et on recommence. On pourrait montrer par récurrence qu'après $n - p$ étapes, on obtient une famille libre $(f_1, \dots, f_p, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}})$; cette dernière étant de cardinal p , c'est une base de E . □

Corollaire 3.2.13 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit F un sous-espace strict, dont on se donne une base (f_1, \dots, f_p) . Il existe des vecteurs f_{p+1}, \dots, f_n tels que (f_1, \dots, f_n) soit une base de E .

Preuve : Conséquence immédiate du **théorème de l'échange**. □

Corollaire 3.2.14 (Existence de supplémentaires)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace de E admet des supplémentaires.

Preuve : Soit F un sous-espace de E . Si $F = E$ ou $F = \{0\}$, le théorème est trivial. Si F est strict, il est de dimension $p < n$. Donnons-nous une base (f_1, \dots, f_p) de F . D'après le **théorème de la base incomplète**, on peut compléter cette famille en une base (f_1, \dots, f_n) de E . Posons

$$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_p\} \quad \mathcal{G} = \{f_{p+1}, \dots, f_n\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect } \mathcal{G}$$

Par définition, F est le sous-espace engendré par \mathcal{F} . Comme $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre, le **lemme 2.10** assure que F et G sont en somme directe. En outre, cette famille engendre $F \oplus G$ donc $E = F \oplus G$: G est un supplémentaire de F . □

Corollaire 3.2.15 (Relation de Grassmann)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces. On a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Preuve : On sait qu'il existe un supplémentaire S_F de $F \cap G$ dans F :

$$(F \cap G) \oplus S_F = F$$

Montrons que G et S_F sont supplémentaires dans $F + G$.

D'abord, soit $x \in G \cap S_F$. Comme $S_F \subset F$, x est dans $F \cap G$. Or, $F \cap G$ et S_F sont en somme directe, donc $x = 0$. Ce qui établit que G et S_F sont en somme directe.

Ensuite, si x est dans $F + G$, il se décompose comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\exists x_F \in F \quad \exists x_G \in G \quad x = x_F + x_G$$

Puisque $F = (F \cap G) \oplus S_F$, x_F se décompose lui-même comme somme d'un vecteur de $F \cap G$ et d'un vecteur de S_F :

$$\exists y \in (F \cap G) \quad \exists z \in S_F \quad x_F = y + z$$

d'où

$$x = x_F + x_G = y + z + x_G = z + \underbrace{y + x_G}_{\in G}$$

donc x est dans $S_F + G$. Ce qui établit la première inclusion

$$F + G \subset S_F \oplus G$$

Pour l'inclusion réciproque, il suffit de constater que $S_F \subset F + G$ (car $F + G$ contient F , qui contient lui-même S_F) et $G \subset F + G$. Donc $F + G$ est un sous-espace de E , contenant $S_F \cup G$; il contient donc $S_F \oplus G$. Par suite,

$$F + G = S_F \oplus G$$

D'après le **corollaire 2.11**,

$$\dim(F + G) = \dim S_F + \dim G$$

Toujours d'après ce **corollaire 2.11** et parce que $F = (F \cap G) \oplus S_F$, on a

$$\dim F = \dim(F \cap G) + \dim S_F \quad \text{soit} \quad \dim S_F = \dim F - \dim(F \cap G)$$

d'où

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \quad \square$$

Pour prouver ce théorème, on aurait aussi pu procéder ainsi : on note

$$p = \dim F \quad q = \dim G \quad m = \dim(F \cap G)$$

et on prend une base (e_1, \dots, e_m) de $F \cap G$. Il existe $(e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_p)$ base de F et $(e_1, \dots, e_m, g_{m+1}, \dots, g_q)$ base de G , obtenues en complétant (e_1, \dots, e_m) . Il suffit de montrer

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_p, g_{m+1}, \dots, g_q)$$

est une base de $F + G$; en effet, puisqu'elle a pour cardinal $p + q - m$, la relation de Grassmann s'ensuit.

Comme \mathcal{B} est obtenue en réunissant une base de F et une base de G , elle engendre $F + G$. La seule technicité est la liberté de cette famille. Il faut se donner une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k e_k + \sum_{k=m+1}^p \lambda_k f_k + \sum_{k=m+1}^q \mu_k g_k = 0$$

et montrer que tous les coefficients sont nuls. En posant

$$x = \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k + \sum_{k=m+1}^p \lambda_k f_k = - \sum_{k=m+1}^q \mu_k g_k$$

on observe que x appartient à la fois à F et à G . Donc $x \in F \cap G$; c'est-à-dire que x est uniquement combinaison linéaire des vecteurs (e_1, \dots, e_m) . Ceci implique automatiquement

$$\sum_{k=m+1}^p \lambda_k f_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=m+1}^q \mu_k g_k = 0$$

et par suite,
$$\sum_{k=1}^m \alpha_k e_k = 0$$

Comme les familles (e_1, \dots, e_m) , (f_{m+1}, \dots, f_p) et (g_{m+1}, \dots, g_q) sont libres, il s'ensuit que les $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq m}$, les $(\lambda_k)_{m+1 \leq k \leq p}$ et les $(\mu_k)_{m+1 \leq k \leq q}$ sont nuls. \mathcal{B} est donc libre.

3.2.5 Applications linéaires et espaces de dimension finie

Théorème 3.2.16

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\text{Im } f$ est de dimension finie, inférieur à $\dim E$. Il est engendré par l'image d'une base de E .

Preuve : Donnons-nous une base (e_1, \dots, e_n) de E . On a

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} \\ &= \left\{ f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\ \text{Im } f &= \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

On voit donc que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre $\text{Im } f$, qui est donc de dimension finie. □

Théorème 3.2.17

Soit n un entier non nul. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Preuve : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit \mathcal{B} une base de E ; elle a pour cardinal n . D'après le **corollaire 1.11**, l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto [x]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Corollaire 3.2.18

Deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, ils sont de même dimension.

Preuve : Si E et F ont même dimension n , ils sont chacun isomorphes à \mathbb{K}^n : il existe des isomorphismes $g : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ et $h : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Donc $h^{-1} \circ g$ est linéaire, et bijective; c'est un isomorphisme de E sur F .

Nous pouvons même préciser un tel isomorphisme une fois qu'on s'est donné une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F . En effet, on sait d'après le **corollaire 1.11** qu'on peut prendre pour g l'unique application linéaire de E dans \mathbb{K}^n , qui envoie les vecteurs de \mathcal{B} sur la base canonique de \mathbb{K}^n . Tandis que h^{-1} est celle qui envoie la base canonique de \mathbb{K}^n sur les vecteurs de \mathcal{C} . Donc $h^{-1} \circ g$ est l'unique application linéaire de E dans F , qui envoie les vecteurs de \mathcal{B} sur ceux de \mathcal{C} . Plus précisément, si on développe

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$$

alors
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad h^{-1} \circ g \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$$

Réciproquement, supposons que E et F sont isomorphes. Il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$, bijective. Notons n et m les dimensions respectives de E et F . D'après le **théorème 2.16**,

$$\dim \text{Im } f \leq n$$

Or, f est surjective donc $\text{Im } f = F$. D'où $m \leq n$.

Pour l'inégalité inverse, on utilise f^{-1} , qui est surjective de F dans E . Donc E et F ont même dimension. □

Définition 3.2.19

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *rang de f* la dimension de $\text{Im } f$.

En vue du **théorème 2.16**, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , le rang de f sera la dimension du sous-espace engendré par $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 3.2.20 (Théorème du rang)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim \text{Ker } f + \text{rg } f = \dim E$$

Preuve: On sait que $\text{Ker } f$ admet des supplémentaires, d'après le **corollaire 2.14**. Soit G l'un d'entre eux. D'après le **corollaire 2.11**,

$$\dim G + \dim \text{Ker } f = \dim E$$

On a vu dans le cours d'introduction à l'algèbre linéaire que G est isomorphe à $\text{Im } f$; donc ces deux sous-espaces ont même dimension. Par suite,

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E \quad \square$$

Corollaire 3.2.21

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective;
2. f est surjective;

3. f est bijective.

Preuve : Conséquence immédiate du **théorème du rang** et du **théorème 2.8**. □

Corollaire 3.2.22

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Les hyperplans de E sont ses sous-espaces de dimension $n - 1$.

Preuve : Soit H un sous-espace de E . Si H est un hyperplan, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle f . Or, $\text{Im } f = \mathbb{K}$, qui est de dimension 1 donc

$$\dim H = \dim \text{Ker } f = n - \dim \text{Im } f = n - 1$$

Réciproquement, si H est de dimension $n - 1$, il admet une base (e_1, \dots, e_{n-1}) , qu'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E . D'après le **théorème 1.13**, il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, telle que

$$f(e_1) = \dots = f(e_{n-1}) = 0 \quad \text{et} \quad f(e_n) = 1$$

f est une forme linéaire non nulle, dont le noyau contient H . Or, $\text{Ker } f$ et H ont même dimension $n - 1$ donc sont égaux d'après le **théorème 2.8**. H est un hyperplan. □