Espaces de Dimension Finie

Lorsque rien n'est précisé, le contexte de l'exercice est un espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

1 Pour chacun des systèmes de vecteurs suivants, décider s'ils sont linéairement indépendants ou pas dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Donner une base du sous-espace qu'ils engendrent et trouver un supplémentaire de ce sous-espace. Enfin, donner leur rang, une fois que cette notion aura été étudiée en cours.

$$\begin{cases} x_1 = (-3,1,5) \\ x_2 = (6,12,15) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (4,-12,28) \\ x_2 = (-7,21,-49) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (1,2,3,0) \\ x_2 = (2,4,6,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1,\mathrm{i},2-\mathrm{i},3+\mathrm{i}) \\ x_2 = (1-\mathrm{i},1+\mathrm{i},3-\mathrm{i},4-2\mathrm{i}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (1,2,3) \\ x_2 = (2,5,7) \\ x_3 = (3,7,10) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (1,2,3) \\ x_2 = (2,5,7) \\ x_3 = (3,7,11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1,2,3) \\ x_2 = (2,5,7) \\ x_3 = (3,7,\alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (1,1,1,1) \\ x_2 = (1,-1,-1,1) \\ x_3 = (1,-1,1,-1) \\ x_4 = (1,1,-1,-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (5,-3,2,1,10) \\ x_2 = (-1,8,1,-4,7) \\ x_3 = (2,1,9,-3,6) \\ x_4 = (1,3,-5,9,11) \end{cases}$$

2 Soient x, y et z trois vecteurs linéairement indépendants. Examiner l'indépendance linéaire de chacune des familles de vecteurs suivantes :

$$(x, x+y, x+y+z) \qquad (x+y, y+z, z+x) \qquad (x-y, y-z, z-x)$$

Plus généralement, si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants, discuter l'indépendance linéaire de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ lorsque :

(a) $\quad v_1 = u_1 - u_2 \qquad v_2 = u_2 - u_3 \qquad \cdots \qquad v_{n-1} = u_{n-1} - u_n \qquad v_n = u_n - u_1$

(b) $\quad v_1 = u_1 + u_2 \qquad v_2 = u_2 + u_3 \qquad \cdots \qquad v_{n-1} = u_{n-1} + u_n \qquad v_n = u_n + u_1$

3 Montrer que, quels que soient les vecteurs x, y, z et les scalaires α, β, γ, les trois vecteurs $\alpha x - \beta y, \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x$ sont liés.

4 Soient a, b, c trois nombres réels distincts. Examiner si les trois polynômes

$$(X-a)(X-b), (X-b)(X-c), (X-c)(X-a)$$

forment une famille libre dans $\mathbb{K}[X]$.

5 Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle *opération élémentaire sur les* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une des opérations suivantes :

- échanger deux vecteurs de cette famille ;
- multiplier un vecteur de cette famille par un scalaire non nul ;
- ajouter à un vecteur de cette famille une combinaison linéaire des autres.

Montrer que le rang de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n'est pas modifié après une opération élémentaire.

6 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit n un entier non nul, soient $r_1, \ldots, r_n$ des nombres complexes distincts. Montrer que les fonctions $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définies par

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!] \qquad e_i : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_i x}$$

forment une famille libre. En déduire que E n'est pas de dimension finie.

7 Posons $\qquad V = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y - 2z \quad z = 2t\right\}$

Trouver une base et un supplémentaire de V, sans oublier d'expliquer pourquoi V est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

8 Trouver une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, y+z, x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y+z) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & X(P' - P'(0)) \end{array}$$

9 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et f l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \qquad f(P) = P(X+1) + P$$

Montrer que P est linéaire, trouver $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id})$ et $\operatorname{Im}(f - 2\mathrm{id})$.

10 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\quad \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2 \iff \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$

   Donner un exemple d'un tel u.
2. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff (f^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad n = 2\operatorname{rg} f)$$

3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = E$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

11 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{C}_n[X]$ et

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad P_k = X^k(1-X)^{n-k}$$

Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.

12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. À quelle condition (nécessaire et suffisante) existe-t-il un endomorphisme f de E tel que $\operatorname{Ker} f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$?

13 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient u et v dans $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(F,G)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker} vu \leqslant \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v$$

et que $$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(vu) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

2. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Monter que

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$

14 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad K_p = \operatorname{Ker} f^p \qquad \text{et} \qquad I_p = \operatorname{Im} f^p$$

1. Montrer que $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$ pour tout entier p.
2. En déduire qu'il existe $p \in [\![0\,;\,n]\!]$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.
3. On note p_0 le plus petit entier p qui vérifie la propriété ci-dessus. Montrer que

$$\forall p \geqslant p_0 \qquad K_p = K_{p_0} \qquad \text{et} \qquad I_p = I_{p_0}$$

4. Montrer que la suite $(\dim(K_{p+1}) - \dim(K_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$. Montrer que $f^n = 0$.

15 Soient E de dimension finie $n \neq 0$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. On appelle *indice de nilpotence de* f le plus petit entier k tel que $f^k = 0$.

Montrer que si f est nilpotent d'indice n, il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E. Calculer le rang de f et montrer que $I + f$ est un automorphisme de E.

16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur E. Montrer que, si $f \in E^\star$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i) : } f \in \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_p) \qquad\qquad \text{(ii) : } \operatorname{Ker} f \supset \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker} f_k$$

17 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = I$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(I - f) \subset \operatorname{Ker}(I + f + f^2)$.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(I - f) \oplus \operatorname{Im}(I - f)$.
3. On note $F = \operatorname{Im}(I - f)$. Soit $x \in F$, non nul ; montrer que $f(x) \neq 0$ et que $(x, f(x))$ est libre.
4. Montrer que F est de dimension paire.

18 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement si $\dim F = \dim G$.

19 On suppose E de dimension finie n non nulle. On note $\mathscr{V}$ l'ensemble de tous les sous-espaces de E. Soit φ une application de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(\{0\}) = 0 \\ \varphi(E) = n \\ \forall E_1, E_2 \in \mathscr{V} \qquad \varphi(E_1 + E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2) - \varphi(E_1 \cap E_2) \end{cases}$$

1. Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de E, en somme directe. Montrer que

$$\varphi\Big(\bigoplus_{k=1}^{p} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(E_k)$$

2. Soit F un sous-espace de E, de dimension $n-1$, tel que $\varphi(F) \geqslant n$. Montrer qu'il existe $G_1, \dots, G_n$ sous-espaces de E, tous supplémentaires de F, tels que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} G_k \quad \text{et} \quad (\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \quad \varphi(G_k) = 0)$$

3. En déduire que si G est un sous-espace de E, de dimension 1, alors $\varphi(G) = 1$.
4. Conclure : que peut-on dire sur φ ?

Indications

Voici quelques indications pour les exercices plus difficiles.

- 14.4 : Prendre un supplémentaire F de K_{p+1} dans K_{p+2} et étudier la restriction de f à F.
- 16 : Pour montrer (ii) $\Longrightarrow$ (i) : Supposer d'abord que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. Considérer l'application

$$\Phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K}^{p+1} \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x), f(x)) \end{array}$$

  et prouver qu'elle n'est pas surjective. Alors il existe un hyperplan qui contient $\operatorname{Im} \Phi$.
- 18 : Faire un dessin. Procéder par récurrence descendante sur la dimension commune de F et G.