

# Chapitre 5

## Déterminants

L'objet de ce chapitre est d'introduire la théorie des formes multilinéaires en dimension finie et d'en étudier une en particulier : le déterminant. Il s'agit d'un outil théorique très important en algèbre linéaire, en particulier parce qu'il permet de caractériser l'inversibilité d'une matrice.

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  est corps commutatif dans lequel  $2 \neq 0$ .

### 5.1 Propriétés élémentaires du groupe symétrique

On rappelle que le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  est l'ensemble des bijections de l'ensemble  $[[1; n]]$  sur lui-même. Ses éléments sont appelés *permutations de  $[[1; n]]$* . Le but de ce court paragraphe est de montrer une propriété de  $\mathfrak{S}_n$ , essentielle pour la suite de ce chapitre : toute permutation de  $[[1; n]]$  peut s'écrire comme produit de transpositions.

#### Définition 5.1.1 (Invariant d'une permutation)

Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . On appelle *invariant* de  $\sigma$  l'ensemble

$$\text{Inv } \sigma = \{k \in [[1; n]] \mid \sigma(k) = k\}$$

Les éléments de  $\text{Inv } \sigma$  sont appelés les *points fixes* de  $\sigma$ .

#### Définition 5.1.2 (Transposition)

Soit  $n \geq 2$  un entier. On appelle *transposition* tout élément de  $\mathfrak{S}_n$  qui a exactement  $n - 2$  points fixes.

#### Théorème 5.1.3

Soit  $n \geq 2$  un entier. Toute permutation de  $[[1; n]]$  peut s'écrire comme produit de transpositions.

**Preuve :** La démonstration se fait par récurrence. Pour tout entier  $n$ , on note  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « toute permutation de  $[[1; n]]$  est un produit de transpositions. »

- $\mathcal{P}(2)$  est vraie : L'ensemble  $\mathcal{S}_2$  est de cardinal 2 et contient donc deux éléments qu'il est facile de déterminer :

$$\text{id} \quad \text{et} \quad \tau : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{cases}$$

$\tau$  est une transposition, puisque  $\text{Inv } \tau = \emptyset$  qui est de cardinal 0. Et on a  $\text{id} = \tau^2$ .

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$  : Soit  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(n+1)$  soit vraie. Soit  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $[[1; n+1]]$ .

Si  $n+1$  est un point fixe de  $\sigma$ , alors  $\sigma$  est en fait une permutation de  $[[1; n]]$ ; d'après  $\mathcal{P}(n)$ ,  $\sigma$  est un produit de transpositions.

Si  $n+1$  n'est pas un point fixe de  $\sigma$ , on a  $\sigma(n+1) \neq n+1$  et on le note  $a$ . On définit alors :

$$\forall k \in [[1; n+1]] \quad \tau(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \notin \{a, n+1\} \\ a & \text{si } k = n+1 \\ n+1 & \text{si } k = a \end{cases}$$

$\tau$  est bien une transposition, puisqu'elle a  $n-2$  points fixes qui sont tous les éléments de  $[[1; n+1]]$  sauf  $a$  et  $n+1$ . Et on a

$$\tau\sigma(n+1) = \tau(\sigma(n+1)) = \tau(a) = n+1$$

Donc  $\tau\sigma$  est une permutation de  $[[1; n+1]]$  qui fixe  $n+1$ ; c'est donc une permutation de  $[[1; n]]$ . D'après  $\mathcal{P}(n)$ , il existe des transpositions  $\tau_1, \dots, \tau_k$  telles que

$$\tau\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$$

d'où

$$\sigma = \tau^{-1}\tau_1 \cdots \tau_k = \tau\tau_1 \cdots \tau_k$$

puisque  $\tau = \tau^{-1}$ . Ce qui achève de démontrer  $\mathcal{P}(n+1)$ .

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ . □

Une transposition de  $[[1; n]]$  est une permutation qui échange simplement deux éléments de  $[[1; n]]$ . Le théorème dit donc qu'une permutation quelconque de  $[[1; n]]$  est la composition d'échanges.

**Exemple 5.1.4**

On prend  $n = 4$ . Considérons la permutation de  $[[1; 4]]$  suivante :

$$\sigma(1) = 2 \quad \sigma(2) = 3 \quad \sigma(3) = 4 \quad \sigma(4) = 1$$

On suit l'idée de la démonstration du théorème pour réussir à décomposer  $\sigma$  : on introduit la transposition  $\tau_1$  qui échange 1 et 4, et fixe 2 et 3. On a alors

$$\tau_1\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto \tau_1(2) = 2 \\ 2 \mapsto \tau_1(3) = 3 \\ 3 \mapsto \tau_1(4) = 1 \\ 4 \mapsto \tau_1(1) = 4 \end{cases}$$

La permutation  $\tau_1\sigma$  fixe 4 et permute 1, 2 et 3. On recommence en introduisant la transposition  $\tau_2$  qui échange 1 et 3, mais qui fixe 2 et 4. Alors

$$\tau_2\tau_1\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto \tau_2(2) = 2 \\ 2 \mapsto \tau_2(3) = 1 \\ 3 \mapsto \tau_2(1) = 3 \\ 4 \mapsto \tau_2(4) = 4 \end{cases}$$

Et on remarque que  $\tau_2\tau_1\sigma$  est une transposition, puisqu'elle fixe 3 et 4. On la note  $\tau_3$ . On a alors

$$\tau_2\tau_1\sigma = \tau_3$$

d'où

$$\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3$$

en composant par  $\tau_2$  puis  $\tau_1$  à gauche.

Peut-être le schéma suivant sera-t-il encore plus clair :

$$(1, 2, 3, 4) \xrightarrow{\tau_3} (2, 1, 3, 4) \xrightarrow{\tau_2} (2, 3, 1, 4) \xrightarrow{\tau_1} (2, 3, 4, 1)$$

En appliquant successivement  $\tau_3$ ,  $\tau_2$  et enfin  $\tau_1$ , on a bien obtenu  $\sigma$ .

## 5.2 Formes multilinéaires

### 5.2.1 Définitions

#### Définition 5.2.1 (Application partiellement linéaire)

Soient  $E_1, \dots, E_n, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $f$  une application de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $F$ . Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On dit que  $f$  est *partiellement linéaire par rapport à la  $k$ -ème variable* si, et seulement si, pour tout  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$ , l'application

$$\begin{aligned} E_k &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

En d'autres termes, il s'agit d'une application qui, une fois toutes les variables fixées, sauf la  $k$ -ème, devient linéaire par rapport à celle-ci.

Soit  $f$  une telle application; soit  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$ . La linéarité par rapport à la  $k$ -ème variable signifie que, pour tous  $x, x' \in E_k$  et tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x + \mu x', x_{k+1}, \dots, x_n) &= \lambda f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\quad + \mu f(x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Évidemment, il se pose un problème de notation si l'on souhaite parler d'une application sur  $E_1 \times \dots \times E_n$ , linéaire par rapport à la première variable, ou par rapport à la  $n$ -ème.

En effet, si  $k = 1$ , alors  $k - 1 = 0$  et il n'y a pas d'espace  $E_0$ ; si  $k = n$ , alors  $k + 1 = n + 1$  et il n'y a pas d'espace  $E_{n+1}$ .

Il n'est pas difficile, cependant, d'imaginer ce que serait la définition rigoureuse dans le cas où  $k = 1$  par exemple : pour que  $f$  soit linéaire par rapport à la première variable, on demande que pour tout  $(x_2, \dots, x_n) \in E_2 \times \dots \times E_n$ , l'application

$$\begin{aligned} E_1 &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow f(x, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

soit linéaire. De la même manière pour une application linéaire par rapport à la dernière variable.

Il est possible de donner une définition peut-être un peu plus rigoureuse, en définissant ce qu'on appelle des opérateurs de projection et d'insertion. Mais les notations deviennent vite incompréhensibles.

#### Exemple 5.2.2

L'application  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est linéaire par rapport à la deuxième variable. En revanche, elle n'est pas linéaire par rapport à la première.

$$(x, y) \longmapsto x^2 y$$

**Définition 5.2.3 (Application multilinéaire)**

Soient  $E_1, \dots, E_n$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $F$  est dite *n-linéaire* si, et seulement si, elle est partiellement linéaire par rapport à toutes ses variables.

Si  $F = \mathbb{K}$ , on dit que  $f$  est une *forme n-linéaire*.

Si  $E_1, \dots, E_n$  sont un même espace vectoriel  $E$ , on dit simplement que  $f$  est *n-linéaire sur E*, bien que  $f$  soit en fait définie sur  $E^n$ .

**Définition 5.2.4 (Application alternée)**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $f$  une application de  $E^n$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est *alternée* si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

**Définition 5.2.5 (Application antisymétrique)**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $f$  une application de  $E^n$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est *antisymétrique* si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall i < j \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

**5.2.2 Propriétés élémentaires**

**Proposition 5.2.6**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application *n-linéaire* de  $E$  dans  $F$  est *antisymétrique* si, et seulement si, elle est *alternée*.

**Preuve :** Soit  $f$  une application *n-linéaire* de  $E$  dans  $F$ .

Supposons d'abord que  $f$  est *alternée*. Soient  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $i < j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . On a alors

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$$

puisque le même vecteur  $x_i + x_j$  est présent aux positions  $i$  et  $j$ . Mais en utilisant la *n-linéarité* de  $f$ , on trouve aussi que

$$0 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$+ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$+ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$+ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Comme  $f$  est *alternée*, le deuxième et le quatrième terme de cette somme sont nuls. D'où

$$f(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$$

ce qui démontre que  $f$  est *antisymétrique*.

Réciproquement, supposons que  $f$  est *antisymétrique*. On se donne  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $i, j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , distincts. On suppose que  $x_i = x_j$ . Ceci veut dire que  $x_i$  se trouve en positions  $i$  et  $j$  dans la liste  $(x_1, \dots, x_n)$ . Si l'on échange ces deux termes, cette liste n'est pas changée; mais comme  $f$  est *antisymétrique*,

$$f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

d'où

$$2f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

et comme  $2 \neq 0$ , il est inversible dans  $\mathbb{K}$  et il vient  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Ce qui démontre que  $f$  est alternée.  $\square$

**Proposition 5.2.7**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. L'ensemble  $\mathcal{L}^n(E, F)$  des formes  $n$ -linéaires alternées de  $E$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Preuve :** On montre que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de  $F^{(E^n)}$ . Évidemment, l'application nulle sur  $E^n$  est  $n$ -linéaire alternée donc  $\mathcal{L}^n(E, F)$  n'est pas vide. Soient  $f$  et  $g$  deux formes  $n$ -linéaires alternées; soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On veut montrer que  $\lambda f + g$  est  $n$ -linéaire alternée.

Soient  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , distincts. On suppose que  $x_i = x_j$ . Alors

$$(\lambda f + g)(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)$$

Mais comme  $f$  et  $g$  sont alternées et  $x_i = x_j$ , chaque terme à droite est nul. Donc  $\lambda f + g$  est alternée.

Montrons aussi la linéarité par rapport à chaque variable. Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ; on se donne une liste  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$ . On sait que les applications

$$\begin{aligned} u: E &\longrightarrow F & \text{et} & & v: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) & & & x &\longmapsto g(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

sont dans  $\mathcal{L}(E, F)$ ; par suite,  $\lambda u + v$  est dans cet espace vectoriel. Ce qui démontre que  $\lambda f + g$  est linéaire par rapport à la  $k$ -ème variable.  $\square$

**Lemme 5.2.8**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , rapporté à une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $f$  une application  $p$ -linéaire de  $E$  dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $F$ . Enfin, soient  $x_1, \dots, x_p$  dans  $E$ , qui se décomposent ainsi dans  $\mathcal{B}$  :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad x_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} e_j$$

Alors 
$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_p,p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$$

**Preuve :** C'est une conséquence simple de la  $p$ -linéarité de  $f$ . On pourrait faire une récurrence sur  $p$ , mais cela rendrait peut-être la preuve plus complexe qu'elle ne l'est. Il suffit de « développer  $f(x_1, \dots, x_p)$   $p$  fois à la suite. On commence par utiliser la linéarité par rapport à la première variable :

$$f(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1}, x_2, \dots, x_p\right) = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} f(e_{i_1}, x_2, \dots, x_p)$$

Puis on décompose  $x_2$  dans  $\mathcal{B}$  :

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} f(e_{i_1}, x_2, \dots, x_p) = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} e_{i_2}, x_3, \dots, x_p\right)$$

Pour chaque  $i_1$  fixé entre 1 et  $n$ , on utilise la linéarité de  $f$  par rapport à la deuxième variable pour dire que

$$a_{i_1,1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} e_{i_2}, x_3, \dots, x_p\right) = \sum_{i_2=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} f(e_{i_1}, e_{i_2}, x_3, \dots, x_p)$$

d'où 
$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1,1} a_{i_2,2} f(e_{i_1}, e_{i_2}, x_3, \dots, x_p)$$

Et l'on continue ainsi, jusqu'à avoir développé par rapport à la  $p$ -ème variable. □

**Théorème 5.2.9**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ , non nulle. Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Elle est libre si, et seulement si,  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

**Preuve :** Supposons que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre et que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . C'est une base  $E$  car  $E$  est de dimension  $n$ . Alors, si  $(y_1, \dots, y_n)$  est un  $n$ -uplet de vecteurs de  $E$ , ils peuvent se décomposer dans la base  $(x_1, \dots, x_n)$  :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} x_j$$

d'où 
$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$$

On se considère un terme de cette somme : soit  $(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Il y a deux possibilités :

- Il existe  $k < \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tels que  $i_k = i_\ell$  : autrement dit, deux des indices sont égaux. Alors dans  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ , le vecteur  $x_{i_k}$  est répété en  $k$ -ème et  $\ell$ -ème position. Comme  $f$  est alternée,  $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = 0$ .
- Les entiers  $i_1, \dots, i_n$  sont distincts deux-à-deux : alors  $(i_1, \dots, i_n)$  fait apparaître tous les entiers de 1 à  $n$ , dans le désordre. Mais  $f$  est alternée, donc antisymétrique d'après la **proposition 2.6**; par suite,

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = \pm f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

En effet, d'après le **théorème 1.3**, on peut transformer la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  en faisant une succession d'échanges de deux vecteurs. Chaque échange change le signe se trouvant devant  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Par suite, 
$$f(y_1, \dots, y_n) = 0$$

et ceci pour tout  $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ . Par suite,  $f$  est nulle, ce qui fournit une contradiction. Donc si  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre,  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

Réciproquement, supposons que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée. Alors l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres. Supposons qu'il s'agit de  $x_1$  : il existe des scalaires  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  tels que

$$x_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k x_k$$

Par suite, 
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=2}^n \lambda_k f(x_k, x_2, \dots, x_n)$$

en utilisant la linéarité de  $f$  par rapport à la première variable. Mais dans chaque terme de cette somme, il y a le vecteur  $x_k$  qui est répété : il se trouve en première et en  $k$ -ème position. Comme  $f$  est alternée, tous les termes sont nuls d'où

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si c'est un autre vecteur que  $x_1$  qui est combinaison linéaire des autres, on l'amène en première position en l'échangeant avec  $x_1$ ; ceci change uniquement le signe de  $f$  car  $f$  est antisymétrique. Et on utilise ce qui précède pour trouver que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .  $\square$

**Corollaire 5.2.10**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{L}^n(E, \mathbb{K})$  est de dimension 0 ou 1.

**Preuve :** On montre que deux formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  forment une famille liée. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ; soient  $f$  et  $g$  deux formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ . Alors

$$f(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad g(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K}$$

donc il existe des scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\lambda f(e_1, \dots, e_n) + \mu g(e_1, \dots, e_n) = 0$$

D'après la **proposition 2.7**,  $\lambda f + \mu g$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . Mais elle s'annule sur  $(e_1, \dots, e_n)$  qui est libre. Donc  $\lambda f + \mu g$  est la forme  $n$ -linéaire alternée nulle.  $\square$

Ce théorème nous dit donc qu'il y a deux possibilités : soit il n'existe pas de forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  de dimension  $n$ , sauf la forme nulle; ou bien il y en a une et alors  $\mathcal{L}^n(E, \mathbb{K})$  est de dimension 1.

L'objectif de la prochaine section est de montrer qu'il existe une forme  $n$ -linéaire alternée non nulle sur  $E$ , en la construisant.

## 5.3 Le déterminant

### 5.3.1 Mineures d'une matrice carrée

**Définition 5.3.1 (Matrice mineure)**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ . On appelle *matrice mineure d'ordre  $(i, j)$  de  $A$* , notée  $A^{(i,j)}$  ou encore  $m_{i,j}(A)$ , la matrice carrée de taille  $n-1$  obtenue en supprimant, dans  $A$ , la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne.

Autrement dit, si  $A = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ , on a

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad A_{k,\ell}^{(i,j)} = \begin{cases} A_{k,\ell} & \text{si } k \leq i-1 \text{ et } \ell \leq j-1 \\ A_{k+1,\ell} & \text{si } k \geq i \text{ et } \ell \leq j-1 \\ A_{k,\ell+1} & \text{si } k \leq i-1 \text{ et } \ell \geq j \\ A_{k+1,\ell+1} & \text{si } k \geq i \text{ et } \ell \geq j \end{cases}$$

Observons que si  $j = 1$ , alors les deux premières conditions ci-dessus ne peuvent pas se produire. Cette remarque est utile pour la démonstration du

**Lemme 5.3.2**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in M_{n+2}(\mathbb{K})$ . On se donne  $i \in \llbracket 1; n+2 \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ . Alors

$$(A^{(i,1)})^{(j,1)} = \begin{cases} (A^{(j,1)})^{(i-1,1)} & \text{si } j \leq i-1 \\ (A^{(j+1,1)})^{(i,1)} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

**Preuve :** Démontrer ce résultat est un vrai bonheur. On peut s'en tirer avec un dessin commenté, mais il est très difficile de donner des explications claires dans un texte écrit. On commence par calculer le terme général de la matrice  $(A^{(i,1)})^{(j,1)}$ , qui est carrée de taille  $n$ , puisqu'elle est obtenue à partir de  $A$  par deux extractions de mineures successives.

Soient  $k, \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On a

$$(A^{(i,1)})_{k,\ell}^{(j,1)} = \begin{cases} A_{k,\ell+1}^{(i,1)} & \text{si } k \leq j-1 \\ A_{k+1,\ell+1}^{(i,1)} & \text{si } k \geq j \end{cases}$$

puis  $(A^{(i,1)})_{k,\ell}^{(j,1)} = \begin{cases} A_{k,\ell+2} & \text{si } k \leq i-1 & \text{et } k \leq j-1 & \text{(1)} \\ A_{k+1,\ell+2} & \text{si } k \geq i & \text{et } k \leq j-1 & \text{(2)} \\ A_{k+1,\ell+2} & \text{si } k+1 \leq i-1 & \text{et } k \geq j & \text{(3)} \\ A_{k+2,\ell+2} & \text{si } k+1 \geq i & \text{et } k \geq j & \text{(4)} \end{cases}$

- **Supposons que  $j \leq i-1$  :** On peut déjà observer que la condition (2) est impossible. On calcule ensuite

$$(A^{(j,1)})_{k,\ell}^{(i-1,1)} = \begin{cases} A_{k,\ell+1}^{(j,1)} & \text{si } k \leq i-2 \\ A_{k+1,\ell+1}^{(j,1)} & \text{si } k \geq i-1 \end{cases}$$

puis  $(A^{(j,1)})_{k,\ell}^{(i-1,1)} = \begin{cases} A_{k,\ell+2} & \text{si } k \leq i-2 & \text{et } k \leq j-1 & \text{(a)} \\ A_{k+1,\ell+2} & \text{si } k \leq i-2 & \text{et } k \geq j & \text{(b)} \\ A_{k+1,\ell+2} & \text{si } k \geq i-1 & \text{et } k+1 \leq j-1 & \text{(c)} \\ A_{k+2,\ell+2} & \text{si } k \geq i-1 & \text{et } k+1 \geq j & \text{(d)} \end{cases}$

On remarque que la condition (c) est impossible. De plus,

- Si  $k \leq j-1$ , alors  $k \leq i-2 \leq i-1$  donc les condition (1) et (a) sont équivalentes.
- La condition (b) est équivalente à la condition (3).
- Si  $k+1 \geq i$  (qui est la même chose que  $k \geq i-1$ ), alors  $k+1 \geq j$  et  $k \geq j$  puisqu'on a supposé que  $j \leq i-1$ . Donc les conditions (4) et (d) sont équivalentes.

Ceci montre que  $\forall k, \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (A^{(i,1)})_{k,\ell}^{(j,1)} = (A^{(j,1)})_{k,\ell}^{(i-1,1)}$

Les deux matrices sont égales, comme annoncé.

- **Si  $j \geq i$  :** on fait exactement le même travail et tout marche bien. □

### 5.3.2 Déterminant d'une matrice carrée

#### Définition 5.3.3 (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit  $A \in M_2(\mathbb{K})$ . On appelle *déterminant de A* le scalaire

$$\det A = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}$$

Soit  $n \geq 2$  un entier. On suppose construite une application déterminant sur tous les espaces  $M_2(\mathbb{K}), \dots, M_n(\mathbb{K})$ . On pose alors

$$\forall A \in M_{n+1}(\mathbb{K}) \quad \det A = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} A_{i,1} \det A^{(i,1)}$$

Ceci définit une application sur  $M_{n+1}(\mathbb{K})$ , qu'on appelle déterminant.

On utilise donc le théorème de récurrence forte pour définir le déterminant sur chacun des espaces  $M_n(\mathbb{K})$  pour  $n \geq 2$ . D'après la définition, pour calculer le déterminant d'une matrice carrée



de taille  $n + 1$ , on doit calculer les déterminants de toutes les matrices mineures  $A^{(1,1)}, \dots, A^{(n+1,1)}$  (qui sont carrées de taille  $n$  donc pour lesquelles le déterminant est déjà défini). Pour chaque  $i \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ , le déterminant de la mineure  $A^{(i,1)}$  est multiplié par  $(-1)^{i+1}$  et par le coefficient  $A_{i,1}$  qui se trouve justement sur la ligne et la colonne de  $A$  qu'on efface pour obtenir  $A^{(i,1)}$ . Et on ajoute tout. C'est ce qu'on appelle *développer le déterminant de  $A$  par rapport à la première colonne*.

Évidemment, les déterminants des mineures  $A^{(1,1)}, \dots, A^{(n+1,1)}$  se calculent eux-mêmes par une formule similaire. Etc, jusqu'à arriver à des matrices  $2 \times 2$  dont le déterminant se calcule par la formule donnée au début de la définition 3.3.

Illustrons ceci sur le calcul d'un déterminant  $3 \times 3$ . Soit  $A \in M_3(\mathbb{K})$ . On a, par définition :

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \\ &= A_{1,1} \det \begin{bmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} - A_{2,1} \det \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} + A_{3,1} \det \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \\ \det A &= A_{1,1}(A_{2,2}A_{3,3} - A_{3,2}A_{2,3}) - A_{2,1}(A_{1,2}A_{3,3} - A_{3,2}A_{1,3}) + A_{3,1}(A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}) \end{aligned}$$

On s'arrête là : la brutalité du calcul est probablement bien illustrée. Maintenant qu'on sait développer un déterminant  $3 \times 3$ , on peut développer un déterminant  $4 \times 4$  : pour ce faire, il faut développer quatre déterminants  $3 \times 3$  qui sont les déterminants des quatre mineurs associés à la première colonne de la matrice considérée. Et ainsi de suite.

**Proposition 5.3.4**

Soit  $n \geq 2$ . Alors  $\det I_n = 1$ .

**Preuve :** Un simple calcul montre que

$$\det I_2 = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

On suppose la formule vraie pour  $n \geq 2$ . Les coefficients de la première colonne de  $I_{n+1}$  sont tous nuls, sauf le premier. Donc

$$\det I_{n+1} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \det I_{n+1}^{(1,1)} = \det I_{n+1}^{(1,1)}$$

Mais la mineure  $I_{n+1}^{(1,1)}$  n'est autre que  $I_n$  donc

$$\det I_{n+1} = \det I_n = 1$$

Le théorème est donc établi par récurrence. □

On en arrive au point important de cette partie :

**Lemme 5.3.5**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Si les deux premières colonnes de  $A$  sont égales, alors  $\det A = 0$ .

**Preuve :** On pose  $N = n - 2$  de sorte que  $n = N + 2$ . On va devoir accomplir l'exploit de développer deux fois de suite le déterminant de  $A$ . On développe une première fois :

$$\det A = \sum_{i=1}^{N+2} (-1)^{i+1} A_{i,1} \det A^{(i,1)}$$

Une deuxième fois :

$$\det A = \sum_{i=1}^{N+2} (-1)^{i+1} A_{i,1} \sum_{j=1}^{N+1} (-1)^{j+1} A_{j,1}^{(i,1)} \det ((A^{(i,1)})^{(j,1)})$$

Les calculs qui suivent sont très désagréables, et je ne parviens pas à les présenter de manière compréhensible. Ils seront faits en détail en cours et il faudra s'en contenter.

Mais en pratique, on utilise le **lemme 3.2**, on fait de grosses manipulations de sommes doubles, on utilise le fait que les deux premières colonnes de  $A$  sont égales et on trouve que  $\det A = 0$ .  $\square$

**Lemme 5.3.6**

Soit  $n \geq 3$  un entier. Soient  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $i < j \in \llbracket 2; n \rrbracket$  tels que les colonnes  $i$  et  $j$  de  $A$  sont égales. Alors  $\det A = 0$

**Preuve :** Il suffit de faire l'observation suivante : si  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , la matrice mineure  $A^{(k,1)}$  a également deux colonnes égales, qui sont les colonnes  $i - 1$  et  $j - 1$ . Donc une récurrence immédiate prouve le résultat, après avoir remarqué qu'une matrice  $2 \times 2$  dont les deux dernière colonnes sont égales a un déterminant nul :

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ab = 0 \quad \square$$

**5.3.3 Déterminant dans  $\mathbb{K}^n$**

**Définition 5.3.7**

Soit  $n \geq 2$  un entier. On appelle *déterminant* sur  $\mathbb{K}^n$  l'application définie par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n \quad \det(x_1, \dots, x_n) = \det [x_1 \ \cdots \ x_n] = \det \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix}$$

**Théorème 5.3.8**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Le déterminant est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{K}^n$ . Si l'on note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , on a  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

**Preuve :** On montre le théorème par récurrence, en notant  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « Le déterminant sur  $\mathbb{K}^n$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{K}^n$ . »

- Le fait que  $\mathcal{P}(2)$  est vraie est un simple calcul. Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^2$ ; alors

$$\det(x_1, x_2) = \det \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} = x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}$$

Il est clair que si  $x_1 = x_2$ , ces deux termes se simplifient ce qui montre que le déterminant est alterné. La linéarité partielle par rapport aux deux variables est également l'affaire d'une simple vérification.

- Soit  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. On se donne  $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$  et  $i < j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , tels que  $x_i = x_j$ . Si  $i \geq 2$ , le **lemme 3.6** montre que  $\det(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$  puisque la matrice  $[x_1 \ \cdots \ x_{n+1}]$  a ses colonnes  $i$  et  $j$  égales.

On suppose donc maintenant que  $i = 1$ . Si  $j = 2$ , le **lemme 3.5** montre que  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  a un déterminant nul : la matrice  $[x_1 \ \cdots \ x_{n+1}]$  a ses deux premières colonnes égales.

Il reste donc à régler le cas où  $i = 1$  et  $j > 2$ . Pour chaque  $k, \ell \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , on note  $x_k^{(\ell)}$  le vecteur  $x_k$  dont on a retiré la  $\ell$ -ème ligne. Alors par définition,

$$\begin{aligned} \det(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \det[x_1 \cdots x_{n+1}] = \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det[x_2^{(\ell)} \cdots x_{n+1}^{(\ell)}] \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_2^{(\ell)}, \dots, x_{n+1}^{(\ell)}) \end{aligned}$$

Il s'agit dans cette somme de l'application déterminant sur  $\mathbb{K}^n$ , dont on sait qu'elle est  $n$ -linéaire alternée d'après  $\mathcal{P}(n)$ . Elle est donc antisymétrique et l'on peut échanger les vecteurs  $x_2^{(\ell)}$  et  $x_j^{(\ell)}$ , ce qui a pour effet de changer le signe du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(x_1, \dots, x_{n+1}) &= - \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_j^{(\ell)}, x_3^{(\ell)}, \dots, x_{j-1}^{(\ell)}, x_2^{(\ell)}, x_{j+1}^{(\ell)}, \dots, x_{n+1}^{(\ell)}) \\ &= -\det(x_1, x_j, x_3, \dots, x_{j-1}, x_2, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Ce dernier déterminant est nul puisque les deux premiers vecteurs sont égaux.

Reste à montrer la  $n$ -linéarité. Commençons par la linéarité par rapport à la première variable. C'est simple, compte-tenu de la définition du déterminant : soient  $x, y, x_2, \dots, x_{n+1}$  dans  $\mathbb{K}^{n+1}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda x + y, x_2, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} (\lambda x_{\ell,1} + y_{\ell,1}) \det(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ &= \lambda \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} y_{\ell,1} \det(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ \det(\lambda x + y, x_2, \dots, x_{n+1}) &= \lambda \det(x, x_2, \dots, x_{n+1}) + \det(y, x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Enfin, si  $j \in \llbracket 2; n \rrbracket$ , on montre la linéarité par rapport à la  $j$ -ème variable. Soient des vecteurs  $x, y, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ . On a

$$\begin{aligned} \det(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_2^{(\ell)}, \dots, x_{j-1}^{(\ell)}, (\lambda x + y)^{(\ell)}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_2^{(\ell)}, \dots, x_{j-1}^{(\ell)}, \lambda x^{(\ell)} + y^{(\ell)}, x_{j+1}^{(\ell)}, \dots, x_{n+1}^{(\ell)}) \end{aligned}$$

Mais d'après  $\mathcal{P}(n)$ , le déterminant sur  $\mathbb{K}^n$  est linéaire par rapport à la  $j - 1$ -ème variable donc

$$\begin{aligned} \det(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) &= \lambda \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_2^{(\ell)}, \dots, x_{j-1}^{(\ell)}, x^{(\ell)}, x_{j+1}^{(\ell)}, \dots, x_{n+1}^{(\ell)}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} x_{\ell,1} \det(x_2^{(\ell)}, \dots, x_{j-1}^{(\ell)}, y^{(\ell)}, x_{j+1}^{(\ell)}, \dots, x_{n+1}^{(\ell)}) \\ &= \lambda \det(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad + \det(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Ce qui achève de démontrer  $\mathcal{P}(n + 1)$ .

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

Enfin, si l'on note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , on a simplement

$$\det(e_1, \dots, e_n) = \det I_n = 1$$

d'après la **proposition 3.4**. □

**Corollaire 5.3.9 (Propriété fondamentale)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . Une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  est libre si, et seulement si, son déterminant relatif à n'importe quelle base n'est pas nul.

**5.3.4 Déterminant dans un espace vectoriel de dimension finie**

**Définition 5.3.10**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . On se donne une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On appelle *déterminant relativement à la base  $\mathcal{B}$*  l'application

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} E^n \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)) = \det([x_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [x_n]_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

**Théorème 5.3.11**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension rapporté à une base  $\mathcal{B}$ . L'application  $\det_{\mathcal{B}}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  et  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

**Preuve :** C'est une conséquence immédiate du **théorème 3.8**, et du fait que l'application

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto [x]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

est linéaire. □

**Corollaire 5.3.12**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . L'espace  $\mathcal{L}^n(E, \mathbb{K})$  est de dimension 1.

**Preuve :** On a montré qu'il existe des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  : le déterminant par rapport à n'importe quelle base fait l'affaire. D'après le **corollaire 2.10**,  $\mathcal{L}^n(E, \mathbb{K})$  est de dimension 1. □

**Corollaire 5.3.13**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $E$ . Alors

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n)$$

et 
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = 1$$

**Preuve :** Les applications  $\det_{\mathcal{B}}$  et  $\det_{\mathcal{C}}$  sont proportionnelles puisque  $\mathcal{L}^n(E, \mathbb{K})$  est de dimension 1. Donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier, 
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \lambda \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \lambda$$

d'où 
$$\forall x_1, \dots, x_n \in E \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n)$$

Il suffit d'évaluer cette relation sur la famille  $\mathcal{B}$  pour avoir la deuxième formule. □

## 5.4 Calculs de déterminants

Évidemment, en l'état actuel des choses, un déterminant est loin d'être facile à calculer. Pour des matrices  $3 \times 3$  ou  $4 \times 4$ , les calculs sont acceptables. Mais au-delà, le calcul direct devient indécemment. De plus, nous voudrions l'année prochaine calculer des déterminants de matrices dont les coefficients sont des indéterminées et si possible les factoriser; un calcul direct ne permet pas cela. Ce paragraphe établit donc des règles de calcul pratique.

Les premiers théorèmes sont donnés sans preuve, puisqu'ils sont des conséquences immédiates des **théorèmes 3.8 et 2.9**.

### Théorème 5.4.1

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , dont on note les colonnes  $C_1, \dots, C_n$ . Alors

- $\forall i < j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \det A = -\det[C_1 \cdots C_{i-1} C_j C_{i+1} \cdots C_{j-1} C_i C_{j+1} \cdots C_n]$

Autrement dit, si on échange deux colonnes d'une matrice, on change le signe du déterminant.

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \det A = \det[C_1 \cdots C_{i-1} \lambda C_i C_{i+1} \cdots C_n]$

Multiplier une colonne par  $\lambda$  multiplie le déterminant de  $A$  par  $\lambda$ .

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

Multiplier  $A$  par  $\lambda$  multiplie le déterminant par  $\lambda^n$ .

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \lambda_i \det A = \det[C_1 \cdots C_{i-1} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k C_k \right) C_{i+1} \cdots C_n]$

Remplacer la  $i$ -ème colonne par une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  multiplie simplement le déterminant de  $A$  par le coefficient affecté à la  $i$ -ème colonne.

En particulier, **ajouter** à une colonne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

- $A$  est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul.

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{j,i} \det A^{(j,i)}$

Un déterminant peut être développé par rapport à n'importe quelle colonne.

### Exemple 5.4.2

Donnons-nous trois scalaires  $a, b, c$  et tentons de calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

Un calcul direct, en développant par rapport à la première colonne, par exemple, fournit une superbe expression que je n'ai pas le courage d'écrire. Mais si l'on s'y prend avec méthode, on peut obtenir directement une formule factorisée. Effectuons dans l'ordre :

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

Ces opérations ne changent pas le déterminant donc

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & b-a & c-b \\ 1 & a^2-1 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 1 & a^3-1 & b^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}$$

On peut voir que  $a - 1$  se met en facteur dans la première colonne ;  $b - a$  dans la deuxième et  $c - b$  dans la troisième :

$$D = (a - 1)(b - a)(c - b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a + 1 & b + a & c + b \\ 1 & a^2 + a + 1 & b^2 + ab + a^2 & c^2 + bc + b^2 \end{vmatrix}$$

On effectue alors les opérations suivantes, qui ne changent pas le déterminant :

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

et il vient 
$$D = (a - 1)(b - a)(c - b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a + 1 & b - 1 & c - a \\ 1 & a^2 + a + 1 & b^2 + ab - a - 1 & c^2 + bc - ab - a^2 \end{vmatrix}$$

On remarque que  $b^2 + ab - a - 1 = (b - 1)(b + 1) + a(b - 1) = (b - 1)(a + b + 1)$

et de même  $c^2 + bc - ab - a^2 = (c - a)(c + a) + b(c - a) = (c - a)(a + b + c)$

ce qui permet de factoriser  $b - 1$  dans la troisième colonne et  $c - a$  dans la dernière :

$$D = (a - 1)(b - 1)(b - a)(c - a)(c - b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a + 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 + a + 1 & a + b + 1 & a + b + c \end{vmatrix}$$

Et la dernière modification de colonne est  $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$  :

$$D = (a - 1)(b - 1)(b - a)(c - a)(c - b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a + 1 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 + a + 1 & a + b + c & c - 1 \end{vmatrix}$$

On factorise le  $c - 1$  de la dernière colonne :

$$D = (a - 1)(b - 1)(c - 1)(b - a)(c - a)(c - b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a + 1 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 + a + 1 & a + b + c & 1 \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant se développe sans le moindre problème par rapport à la dernière colonne, qui est bien remplie de zéros. Quelques secondes plus tard, il vient

$$D = (a - 1)(b - 1)(c - 1)(b - a)(c - a)(c - b)$$

Mais on peut faire bien mieux. Il faut cependant travailler un peu plus :

### Théorème 5.4.3

Soit  $n \geq 2$  un entier. Alors

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det(BA) = (\det B)(\det A)$$

**Preuve :** On définit  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \det(Bx_1, \dots, Bx_n)$

Il est évident que  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{K}^n$  puisque le produit matriciel est distributif sur l'addition vectorielle. D'après le **corollaire 3.12**,  $f$  est proportionnelle au déterminant sur  $\mathbb{K}^n$  : il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n \quad \det(Bx_1, \dots, Bx_n) = \lambda \det(x_1, \dots, x_n)$$

On trouve  $\lambda$  en évaluant cette expression sur la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , sur laquelle le déterminant vaut 1. Et il vient que  $\lambda = \det B$  :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n \quad \det(Bx_1, \dots, Bx_n) = \det B \times \det(x_1, \dots, x_n)$$

Enfin, on prend pour  $x_1, \dots, x_n$  les colonnes de  $A$ , dans l'ordre et il vient

$$\det(BA) = (\det B) (\det A) \quad \square$$

**Corollaire 5.4.4**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Alors

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det A = \det({}^t A)$$

**Preuve :** On vérifie sans aucun mal que le résultat est vrai pour les matrices d'opérations élémentaires introduites dans le chapitre sur les matrices. Mais toute matrice  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  peut s'écrire sous la forme

$$A = E_1 \cdots E_p$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_p$  sont des matrices élémentaires. Par suite,

$${}^t A = {}^t E_p \cdots {}^t E_1$$

d'où  $\det {}^t A = (\det {}^t E_p) \cdots (\det {}^t E_1) = (\det E_p) \cdots (\det E_1) = \det A$

Si  $A$  n'est pas inversible, alors  ${}^t A$  n'est pas inversible également car ces deux matrices ont le même rang. Par conséquent, leurs déterminants sont égaux, tous les deux, à zéro.  $\square$

**Corollaire 5.4.5**

Dans le **théorème 4.1**, on peut remplacer le mot « colonne » par « ligne. »

**Théorème 5.4.6**

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls. Soient  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_p(\mathbb{K})$  et  $C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = (\det A)(\det B)$$

**Preuve :** On note

- $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}^n$  les colonnes de  $A$  ;
- $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{K}^n$  les colonnes de  $C$  ;
- $B_1, \dots, B_p \in \mathbb{K}^p$  les colonnes de  $B$ .
- $0_p$  le vecteur nul dans  $\mathbb{K}^p$ .

et on définit  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \det \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 0_p \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ 0_p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_p \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} \right)$

Il est évident que  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{K}^n$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det(x_1, \dots, x_n)$$

On évalue cette expression sur la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Il vient immédiatement que

$$\det B = \lambda$$

donc 
$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = (\det B) \det(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier, 
$$f(A_1, \dots, A_n) = (\det B) \det(A_1, \dots, A_n) = (\det B) (\det A)$$

C'est exactement la formule recherchée. □

## 5.5 Allons plus loin

### 5.5.1 Déterminant d'un endomorphisme

#### Théorème 5.5.1

Soient  $n \geq 2$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Toutes les matrices représentatives de  $f$  ont le même déterminant.

**Preuve :** Il suffit de montrer que le déterminant d'une matrice associée à  $f$  ne dépend pas du choix de la base. On se donne donc deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $E$ . On note  $B$  et  $C$  les matrices de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  respectivement, et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . On sait que  $C = PBP^{-1}$  donc

$$\det C = \det(PBP^{-1}) = (\det P)(\det B)(\det P^{-1}) = (\det PP^{-1})(\det B) = \det B \quad \square$$

#### Définition 5.5.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  rapporté à une base  $\mathcal{B}$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle *déterminant de  $f$*  le déterminant de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ . Celui-ci ne dépend pas de la base choisie.

L'intérêt de cette notion est évident : on peut calculer le déterminant d'un endomorphisme de  $E$  dans n'importe quelle base. Si l'on trouve une base « sympathique », dans laquelle  $f$  a une matrice avec beaucoup de zéros, on s'empressera de travailler dessus pour calculer le déterminant de  $f$ . Le théorème suivant est trivial, compte-tenu de la définition précédente :

#### Corollaire 5.5.3

Soient  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  est un automorphisme de  $E$  si, et seulement si,  $\det f \neq 0$ .

### 5.5.2 Formule de la comatrice

#### Définition 5.5.4

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Les déterminants des mineurs de  $A$  sont appelés *cofacteurs* de  $A$ . La matrice  $\text{Com}A$ , définie par

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (\text{Com}A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A^{(i,j)}$$

est appelée *comatrice* de  $A$ .



**Théorème 5.5.5 (Formule de la comatrice)**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On a

$$({}^t \text{Com}A)A = (\det A)I_n$$

En particulier,  $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A^{-1} = \frac{{}^t \text{Com}A}{\det A}$

**Preuve :** On se donne  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et on calcule le coefficient  $i, j$  de  $({}^t \text{Com}A)A$ . D’abord, on rappelle que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad ({}^t \text{Com}A)_{i,k} = (\text{Com}A)_{k,i} = (-1)^{k+i} \det A^{(k,i)}$$

donc  $(({}^t \text{Com}A)A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} A_{k,j} \det A^{(k,i)}$

Si  $i = j$ , on reconnaît le développement de  $\det A$  par rapport à la  $i$ -ème colonne. Si  $i \neq j$ , on reconnaît le développement du déterminant de la matrice  $A$  dans laquelle on a remplacé la  $i$ -ème colonne par la  $j$ -ème; cette matrice a deux colonnes identiques (la  $i$ -ème et la  $j$ -ème) donc ce déterminant est nul. Par suite,

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad ({}^t \text{Com}A)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det A & \text{si } i = j \end{cases}$$

Autrement dit,  $({}^t \text{Com}A)A = (\det A)I_n$  □

Cette formule paraît très intéressante pour calculer l’inverse d’une matrice inversible. Mais... numériquement, elle est inutilisable. En effet, un calcul de déterminant  $n \times n$  requiert aux alentours de  $n!$  opérations. Cela prend un temps ridicule si  $n$  est grand. En revanche, pour les matrices  $n = 2, 3$  ou  $4$ , il peut être intéressant d’utiliser la comatrice. Il ne faut, bien sûr, pas se tromper avec l’alternance des signes quand on calcule les cofacteurs.

La formule de la comatrice a donc un intérêt purement théorique, et elle a effectivement des applications importantes.

**5.5.3 Les formules de Cramer**

Les formules de Cramer « permettent » théoriquement de calculer les solutions d’un système linéaire (carré) inversible.

**Théorème 5.5.6 (Formules de Cramer)**

Soient  $n \geq 2$  un entier et  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , dont on note les colonnes  $A_1, \dots, A_n$ . Soient  $B \in \mathbb{K}^n$  et  $X = A^{-1}B$  l’unique solution du système linéaire  $AX = B$ . Alors

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = \frac{\det[A_1 \cdots A_{i-1} B A_{i+1} \cdots A_n]}{\det A}$$

**Preuve :** Puisque  $AX = B$ , on a  $\sum_{k=1}^n x_k A_k = B$ . Donc si  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a par linéarité du déterminant par rapport à la  $i$ -ème variable :

$$\det[A_1 \cdots A_{i-1} B A_{i+1} \cdots A_n] = \sum_{k=1}^n x_k \det[A_1 \cdots A_{i-1} A_k A_{i+1} \cdots A_n]$$

Mais si  $k \neq i$  dans cette somme, la matrice dont on calcule le déterminant a deux colonnes identiques : la  $i$ -ème et la  $k$ -ème. Donc

$$\det [A_1 \cdots A_{i-1} B A_{i+1} \cdots A_n] = x_i \det [A_1 \cdots A_{i-1} A_i A_{i+1} \cdots A_n] = x_i \det A$$

donc  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = \frac{\det [A_1 \cdots A_{i-1} B A_{i+1} \cdots A_n]}{\det A} \quad \square$

À nouveau, il s'agit d'une formule dont l'intérêt est purement théorique. Sauf pour la résolution de systèmes  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$ , la méthode du pivot est beaucoup plus efficace.