Déterminants

1 Calculer les déterminants suivants, et donner une expression factorisée si possible. Les coefficients sont tous dans le corps $\mathbb{K}$. Lorsqu'il y a un symbole en gras, comme $\boldsymbol{x}$, cela signifie que tous les coefficients qui ne sont pas écrits sont égaux à x.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & \cdots & x_1+y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n+y_1 & \cdots & x_n+y_n \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \cdots & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad s_k = \sum_{i=1}^{k} i \qquad D_6 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$D_7 = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix} \qquad D_8 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_9 = \det(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ avec } a_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i+j=n+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad D_{10} = \det(|i-j|)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

$$D_{11} = \det(\delta_{i,j}+\alpha_i\beta_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \qquad D_{12} = \det((\alpha_i+\beta_j)^{n-1})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \ddots & \\ & & & n-x \end{vmatrix} \qquad D_{14} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \boldsymbol{\beta} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{\alpha} & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$D_{15} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad D_{16} = \det(\operatorname{sh}(\alpha_i+\alpha_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

$$D_{17} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_{18} = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \cdots & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

Indications (on note, à chaque fois, A la matrice dont on doit calculer le déterminant) :

- $\mathbf{D_7}$: Considérer D_7 comme une fonction polynomiale et trouver ses racines évidentes.
- $\mathbf{D_{11}}$: La matrice $(\alpha_i\beta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est de rang 0 ou 1. Faire un changement de base intelligent.
- $\mathbf{D_{12}}$: Écrire A comme un produit de matrices et utiliser le calcul de D_{15}.
- $\mathbf{D_{14}}$: Étudier le polynôme $P = \det(A+XJ)$ où J est la matrice dont tous les coefficients sont 1.
- $\mathbf{D_{15}}$: Considérer D_{15} comme une fonction polynomiale de la variable a_n.
- $\mathbf{D_{16}}$ est nul si $n \geqslant 3$.

2 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A. Montrer que $\det\overline{A} = \overline{\det A}$.

3 Soient $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{vmatrix}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée, à l'aide des fonctions $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et leurs dérivées. En déduire la valeur de

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos(a+b) & \sin(a+b) \\ 1 & \cos(a+c) & \sin(a+c) \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

4 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On considère la matrice $B = A - XI_n$, qui est à coefficients dans le corps $\mathbb{K}(X)$. En utilisant la super-formule :

1. Montrer que $\det A$ est dans $\mathbb{K}[X]$, de degré n, noté χ_A. Calculer ses coefficients de degré n et $n-1$.
2. Montrer que « on peut remplacer X par n'importe quelle valeur, » c'est-à-dire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

5 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}) \qquad f_A(X) = AX$$

Calculer le déterminant de f_A.

6 Soient A, B, C et D dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose que D est inversible et commute avec C. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$$

2. On suppose A inversible. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

3. Calculer $\begin{vmatrix} 0 & B \\ C & D \end{vmatrix}$ en fonction des déterminants de B, C et D.
4. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.
5. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

7 Si E est de dimension finie non nulle et $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, prouver qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure stricte.

Application : Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente, telles que $AN = NA$. Montrer que $\det(A+N) = \det A$. On pourra considérer séparément les cas « A inversible » et « A non inversible. »

8 Soient $p, q \in \mathbb{N}^\star$, distincts. Soient $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(AB) = 0$ ou $\det(BA) = 0$.

9 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Étudier le rang de $\mathrm{Com}\,A$ en fonction du rang de A.
2. Calculer $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A)$.
3. Montrer que si A est triangulaire supérieure, inversible, alors A^{-1} l'est aussi.
4. On suppose A antisymétrique, inversible. Que peut-on dire sur n ?

10 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}) \qquad \det(A+M) = \det M$$

Montrer que $A = 0$.
Indication : Considérer d'abord le cas où $A = J_r$.

11 Soient $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(I_p + AB) = \det(I_q + BA)$.
Indication : Le rang...

12 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On définit le polynôme $P = \det(A + XB)$. Montrer que $\deg P$ est inférieur à $\mathrm{rg}\,B$.

13 On suppose $\mathbb{K}$ infini. En utilisant le résultat de l'exercice **4**, montrer que : si $D \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid D - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})\}$ est infini.

En déduire que le résultat de l'exercice **6.1** reste vrai, même si D n'est pas inversible.

14 Soit E de dimension n non nulle, avec une base $\mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E \qquad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n) = (\mathrm{Tr}\, u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

15 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.
Indication : Prendre $P \in GL_n(\mathbb{C})$, telle que $B = P^{-1}AP$; à l'aide de ses parties réelle et imaginaire, construire une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $BQ = QA$.

16 Soit A un sous-anneau de $\mathbb{K}$. On note $M_n(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall i, j \in [\![1\,;n]\!] \quad M_{i,j} \in A\}$ et on vérifie rapidement que c'est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in M_n(A)$. Montrer que M est inversible (dans l'anneau $M_n(A)$) si, et seulement si, $\det M$ est inversible dans A.

12 Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Soit $D \in M_n(\mathbb{K})$. On définit

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad P(\lambda) = \det(D - \lambda I_n)$$

L'utilisation de la super-formule montre que P est une fonction polynomiale de degré n. En effet, si on note

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall i, j \in [\![1 ; n]\!] \qquad a_{i,j}(\lambda) = \begin{cases} d_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ d_{i,i} - \lambda & \text{si } i = j \end{cases}$$

alors $$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad P(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant n} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{i_k,k}(\lambda) \right) \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Pour chaque $(i_1, \dots, i_n) \in [\![1 ; n]\!]^n$, la fonction $\prod_{k=1}^{n} a_{i_k,k}$ est un polynôme de degré inférieur à n car $a_{i_1,1}, \dots, a_{i_n,n}$ sont de degré 0 ou 1. En fait, le produit est de degré n si, et seulement si, $i_1 = 1, \dots, i_n = n$. Ceci montre bien que P est de degré n.

Alors P a au maximum n racines. Mais

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda \text{ racine de P} \iff D - \lambda I_n \text{ non inversible}$$

donc $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid D - \lambda I_n \text{ non inversible}\}$ est fini avec au maximum n éléments. Par suite,

$$\boxed{\{\lambda \in \mathbb{K} \mid D - \lambda I_n \text{ inversible}\} \text{ est infini.}}$$

On prend maintenant $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$. On note

$$E = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid D - \lambda I_n \text{ inversible}\}$$

et on sait que E est infini. On définit aussi

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad Q(\lambda) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D - \lambda I_n \end{vmatrix}$$

La super-formule montre que Q est une fonction polynomiale. De plus,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad C(D - \lambda I_n) = CD - \lambda C = DC - \lambda C = (D - \lambda I_n)C$$

L'exercice **5** permet d'obtenir alors que

$$\forall \lambda \in E \qquad Q(\lambda) = \det(A(D - \lambda I_n) - BC)$$

La fonction $\lambda \longmapsto \det(A(D - \lambda I_n))$ est polynomiale sur $\mathbb{K}$. Et elle est égale à Q sur E, qui est un ensemble infini. Donc elle est égale à Q sur $\mathbb{K}$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D - \lambda I_n \end{vmatrix} = \det(A(D - \lambda I_n) - BC)$$

En particulier, cette relation est vraie en 0 :

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)}$$

13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ avec une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E \qquad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Il est clair que f est n-linéaire, parce que u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire.

De plus, f est alternée. En effet, soient $x_1, \dots, x_n \in E$, soient $i < j$ dans $[\![1 ; n]\!]$ tels que $x_i = x_j$. Alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Soit $k \in [\![1 ; n]\!]$. Si $k \neq i$ et $k \neq j$: alors $x_i = x_j$ apparaît en positions i et j. Donc

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$$

Tous les termes dans la somme sont nuls, sauf peut-être deux :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, u(x_i), x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Mais comme le déterminant est antisymétrique,

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, u(x_i), x_{j+1}, \dots, x_n) = -\det(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Quand on ajoute les deux, on obtient 0. Donc $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

f est une forme n-linéaire alternée sur E : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E \qquad f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier, $$f(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda$$

Mais on a aussi $$f(e_1, \dots, e_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n)$$

Notons $$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u$$

Alors $$\forall k \in [\![1 ; n]\!] \qquad u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i$$

et $$\forall k \in [\![1 ; n]\!] \qquad \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, x_n) = a_{k,k}$$

en utilisant le fait que le déterminant est linéaire par rapport à la k-ème variable et alterné.

Finalement, on a

$$\lambda = f(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} u$$

et $$\boxed{\forall x_1, \ldots, x_n \in E \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = (\operatorname{Tr} u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)}$$

14 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Cela signifie qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On a donc $PB = AP$.

La matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est à coefficients complexes. On forme les matrices des parties réelle et imaginaire des coefficients de P : on pose

$$R = (\operatorname{Re}(p_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \qquad I = (\operatorname{Im}(p_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Les matrices R et I sont dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on a $P = R + iI$. On a aussi

$$PB = (R + iI)B = RB + iIB \qquad AP = A(R + iI) = AR + iAI$$

Les matrices RB, IB, AR et AI sont à coefficients réels. Comme $PB = AP$, on a

$$RB = AR \qquad IB = AI$$

et il vient $$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (R + \lambda I)B = A(R + \lambda I)$$

Notre but est maintenant de montrer qu'on peut choisir $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R + \lambda I$ est inversible. On définit

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda) = \det(R + \lambda I)$$

La super formule montre que f est une fonction polynomiale. De plus, $P = R + iI$ est inversible : cela signifie que $f(i) \neq 0$ et f n'est donc pas le polynôme nul. Donc f a un nombre fini de racines. Et en particulier, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. La matrice $Q = R + aI$ est à coefficients réels, inversible, et vérifie $QB = AQ$. Donc $B = Q^{-1}AQ$.

$$\boxed{\text{A et B sont semblables dans } M_n(\mathbb{R}).}$$

15 Soit A un sous-anneau de $\mathbb{K}$. On utilisera plusieurs fois le résultat suivant : si P est une matrice à coefficients dans A, alors $\det P$ est dans A. C'est immédiat par la super-formule.

Soit $M \in M_n(A)$.

- Si M est inversible dans l'anneau $M_n(A)$: il existe $N \in M_n(A)$ telle que $MN = NM = I_n$. Donc

$$(\det M)(\det N) = 1$$

Mais $\det M$ et $\det N$ sont dans A parce que M et N ont leurs coefficients dans A. Donc $\det M$ est inversible dans A.

- Réciproquement, si $\det M$ est inversible dans A, il existe $u \in A$ tel que

$$u \det M = (\det M) u = 1$$

D'après la formule de la comatrice,

$$({}^t\mathrm{Com}\, M)M = M({}^t\mathrm{Com}\, M) = (\det M)\, I_n$$

Il est clair que Com M est à coefficients dans A (toutes les matrices mineures de M sont à coefficients dans A). Donc la matrice $u\,{}^t\mathrm{Com}\, M$ est aussi à coefficients dans A. Il vient

$$(u\,{}^t\mathrm{Com}\, M)M = M(u\,{}^t\mathrm{Com}\, M) = I_n$$

Donc M est inversible dans $M_n(A)$.

$$\boxed{\text{M est inversible dans } M_n(A) \text{ si, et seulement si, } \det M \text{ est inversible dans A.}}$$

16 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{C}))$ tel que

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{C}) \qquad \varphi(M) \in GL_n(\mathbb{C})$$

On fixe $M \in M_n(\mathbb{C})$, non inversible.

1. Notons $r = \operatorname{rg} M$. Comme M n'est pas inversible, $r \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. Il existe des matrices A et B, inversibles, telles que

$$M = A \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{bmatrix} B$$

Alors $$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \lambda M + AB = A\left(\begin{bmatrix} 0_{r,n-r} & \lambda I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{bmatrix} + I_n\right)B$$

Mais pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\begin{bmatrix} 0_{r,n-r} & \lambda I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{bmatrix} + I_n$ est triangulaire supérieure (parce que $r \leqslant n-1$) avec des 1 sur la diagonale. Donc son déterminant est 1, et elle est inversible.

Comme A et B sont aussi inversibles, il vient

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \lambda M + AB \in GL_n(\mathbb{C})}$$

Dans la suite, on pose $P = AB$.

2. Posons $$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda) = \det(\varphi(\lambda M + P)) = \det(\lambda\varphi(M) + \varphi(P))$$

La super-formule montre que f est une fonction polynomiale. De plus,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \lambda \mathrm{M} + \mathrm{P} \text{ est inversible}$$

donc $$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \varphi(\lambda \mathrm{M} + \mathrm{P}) \text{ est inversible}$$

et alors $$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda) \neq 0$$

Cela montre que f n'a pas de racine. D'après le théorème de d'Alembert,

$$\boxed{f \text{ est un polynôme constant.}}$$

3. Notons $a = f(0) = \det(\varphi(\mathrm{P}))$ la valeur de cette constante. En utilisant le fait que det est n-linéaire, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^\star \qquad \det(\varphi(\mathrm{M}) + \lambda\varphi(\mathrm{P})) = \lambda^n \det(\lambda^{-1}\varphi(\mathrm{M}) + \varphi(\mathrm{P})) = \lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = a\lambda^n$$

Mais la fonction $\lambda \longmapsto \det(\varphi(\mathrm{M}) + \lambda\varphi(\mathrm{P})) - a\lambda^n$ est polynomiale (super-formule, encore !). Et elle s'annule en tout point de $\mathbb{C}^\star$, qui est infini. Donc elle est nulle sur $\mathbb{C}$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \det(\varphi(\mathrm{M}) + \lambda\varphi(\mathrm{P})) = a\lambda^n$$

En particulier, $$\det(\varphi(\mathrm{M})) = \det(\varphi(\mathrm{M}) + 0 \times \varphi(\mathrm{P})) = a\,0^n = 0$$

$$\boxed{\varphi(\mathrm{M}) \text{ n'est pas inversible.}}$$