Dérivation

1 Déterminer l'ensemble sur lequel les expressions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $\dfrac{2x+1}{x-2} - \dfrac{1}{x+4}$;
2. $\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$;
3. $x^2 - 2x + \dfrac{3}{x}$;
4. $(x^3 - 2x + 1)^3$;
5. $\sqrt{x^3 + x^2 + 5x}$;
6. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$;
7. $\sin(3x^2)$;
8. $\mathrm{sh}(2\,\mathrm{argsh}\, x) + 2\,\mathrm{argsh}\, x$;
9. $\mathrm{sh}^2 \sqrt{x}$;
10. $\mathrm{ch}\left(x\sqrt{1-2x-x^2}\right)$;
11. $\mathrm{sh}\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$;
12. $\mathrm{ch}\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)$;
13. $\arcsin(x + \sqrt{x^2-1})$;
14. $\exp(x^2)$;
15. $\exp\left(x^{x^2}\right)$;
16. x^x ;
17. $\ln\left(\cos \mathrm{e}^x\right)$;
18. $\sqrt{\sqrt{\exp x}}$.

2

1. Où la fonction $x \longmapsto \frac{1-\cos x}{x}$ est-elle définie ? Où est-elle continue ? Où est-elle prolongeable par continuité ? Où son prolongement est-il dérivable ?
2. La fonction $x \longmapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les dérivées n-èmes des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto x^p \cos px \quad p \in \mathbb{N}$
2. $x \longmapsto x^{n-1}\ln(1+x)$
3. $x \longmapsto (x^2+x)\mathrm{e}^x$
4. $x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$
5. $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$
6. $x \longmapsto x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$
7. $x \longmapsto \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$
8. $x \longmapsto \mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$

4 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

5 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et f une application n fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star \qquad g(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que $$\forall x \in \mathbb{R}^\star \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

6 Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 2$ à coefficients réels, scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P′ est scindé sur $\mathbb{R}$.

7 Soit n un entier. On note f la dérivée n-ème de la fonction $x \longmapsto (x^2-1)^n$. Montrer que f s'annule exactement n fois dans $]-1\,;1[$. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

8 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ et $-\infty$, et que ces limites sont égales. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

9 On pose $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\mathrm{X}^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1. Prouver que $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin x - \mathrm{P}_0(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$$
2. Prouver que $$\forall x \in [0\,; \tfrac{\pi}{2}] \qquad 0 \leqslant \sin x - \mathrm{P}_3(x) \leqslant \frac{x^9}{9!}$$
3. Trouver un $\alpha > 0$ tel que $$\forall x \in [0\,;\alpha] \qquad |\sin x - \mathrm{P}_3(x)| \leqslant 10^{-10}$$
4. Trouver un entier k tel que $$\forall x \in [0\,;1] \qquad |\sin x - \mathrm{P}_k(x)| \leqslant 10^{-20}$$

10 Montrer que pour chaque $t > 0$, assez petit, il existe un unique $c(t) \in]0\,;1[$ tel que

$$\sin t = t - \tfrac{t^3}{6}\cos(tc(t))$$

Étudier l'existence d'une limite pour c en 0.

11 Soient f et g continues sur $[a\,;b]$, dérivables sur $]a\,;b[$. On suppose que g' ne s'annule pas au voisinage de a et que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et vaut $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ existe et vaut ℓ. Proposer une généralisation au cas où l'intervalle est de la forme $[b\,;+\infty[$.

12 Soient f et g dérivables sur $]a;b[$, ayant une limite infinie en a et telles que g' ne s'annule pas au voisinage de a. On suppose que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et vaut $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ existe et vaut ℓ. Proposer une généralisation au cas où l'intervalle est de la forme $[b;+\infty[$.

13 Soit f dérivable sur $[a;b]$, telle que $f'(a)\leqslant f'(b)$. Montrer que si $\gamma\in[f'(a);f'(b)]$, il existe $c\in[a;b]$ tel que $f'(c)=\gamma$.
Indication : On pourra considérer les fonctions $x\longmapsto\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *et* $x\longmapsto\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

14 Trouver une équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par la fonction arcsin. En déduire $\arcsin^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

15 Soient $f\in\mathscr{C}^2([a;b])$ et $x\in]a;b[$. Montrer qu'il existe $c\in]a;b[$, tel que

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

Indication : On pourra considérer $t\longmapsto f(t)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)-\frac{(t-a)(t-b)}{2}\mathrm{A}$, *où* A *est un réel astucieusement choisi.*

16 Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que f s'annule en $x_1<\ldots<x_n$. Soit $a\in]x_1;x_n[$. Montrer qu'il existe $c\in]x_1;x_n[$, tel que

$$f(a)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a-x_i)$$

17 Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'' sont bornées. On note

$$\mathrm{M}_0=\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}}|f|\qquad \mathrm{M}_2=\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}}|f''|$$

Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}}|f'|\leqslant\sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$$

Indication : Si $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$, utiliser le théorème de Taylor en $x+h$ et en $x-h$.

Démontrer un résultat similaire dans le cas où f est trois fois dérivable, avec f et $f^{(3)}$ bornées.

18 Soient $n\in\mathbb{N}$ et f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. On définit

$$g:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ ?? & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}$$

Quelle valeur faut-il donner à $g(0)$ pour que g soit continue ? Montrer alors que g est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.