

Calcul Intégral — Corrigé

Comme d'habitude, ces résultats sont probablement corrects, mais il reste possible que j'aie fait des fautes de frappe ou des erreurs de calcul.

1. La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{4} \left(\ln(x^2 - x + 1) - \ln(x^2 + x + 1) \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$$

On l'obtient par décomposition en éléments simples :

$$\frac{X^2}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2} \frac{X}{X^2-X+1} - \frac{1}{2} \frac{X}{X^2+X+1}$$

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4+x^2+1}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{4} \left(\ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^2 - x + 1) \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$$

On l'obtient par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2} \frac{X+1}{X^2+X+1} + \frac{1}{2} \frac{-X+1}{X^2-X+1}$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt[3]{1+x^2}}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1+x^2} + 3\sqrt[6]{1+x^2} - 3\ln(1 + \sqrt[6]{1+x^2})$$

Cette primitive peut être obtenue par intégration. Une première application du théorème de changement de variable donne, avec $t \mapsto 1 + t^2$ (de droite gauche) :

$$\int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt[3]{1+t^2}} = \frac{1}{2} \int_1^{1+x^2} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}}$$

Puis une deuxième, avec $t \mapsto t^6$ (de gauche à droite) :

$$\int_1^{1+x^2} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}} = \int_1^{\sqrt[6]{1+x^2}} \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2}$$

À partir de là, le calcul de primitive est facile.

4. La fonction $x \mapsto \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \left(\frac{\sin 2 \arctan x}{\sqrt{2}} \right)$$

Vue la présence de termes en $1+x^2$ et $1-x^2$, on a envie de faire un changement de variable trigonométrique $t \mapsto \tan t$ (de gauche à droite) :

$$\int_0^x \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt = \int_0^{\arctan x} \frac{1-\tan^2 t}{\sqrt{1+\tan^4 t}} dt$$

Ensuite, des manipulations trigonométriques :

$$1 + \tan^4 t = (1 + \tan^2 t)^2 - 2 \tan^2 t = \frac{1}{\cos^4 t} - \frac{2 \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - 2 \sin^2 t \cos^2 t}{\cos^4 t} = \frac{1 - \frac{\sin^2 2t}{2}}{\cos^4 t}$$

puis

$$\frac{1 - \tan^2 t}{\sqrt{1 + \tan^4 t}} = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 2t}{2}}} = \frac{\cos 2t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

et une primitive est directement obtenue.

5. La fonction $x \mapsto (x-i)e^{it}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto -ix e^{ix}$$

On intègre par parties.

6. La fonction $x \mapsto \cos x \operatorname{ch} x$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{2}(\sin x \operatorname{ch} x + \cos x \operatorname{sh} x)$$

On peut intégrer par parties ou passer en forme exponentielle, par exemple.

7. La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{(x+1)^3} e^x$ est continue sur chaque intervalle $]-\infty; -1[$ et $] -1; \infty[$. Sur chacun de ces intervalles, elle admet des primitives et l'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{e^x}{(x+1)^2}$$

Ici, on devine la forme que doit avoir notre primitive : il est naturel de la chercher sous la forme $\frac{P(x)}{(x+1)^2} e^x$ où P est un polynôme.

8. Si $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x \tan^2 x$ est continue sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto x \tan x - \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2}$$

Intégrer par parties : dériver le x , primitiver le $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$.

9. La fonction $x \mapsto x \arctan^2 x$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{2} \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Intégrer par parties : dériver $\arctan^2 x$ et primitiver le x .

10. La fonction $x \mapsto \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto 2\sqrt{x} \arctan x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x + \sqrt{2x} + 1}{x - \sqrt{2x} + 1} + \sqrt{2} (\arctan(\sqrt{2x} + 1) + \arctan(\sqrt{2x} - 1))$$

Intégrer par parties : dériver l'arctangente et primitiver la racine carrée pour obtenir

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t} \arctan t]_1^x - 2 \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt$$

Poursuivre avec un changement de variable $t \mapsto t^2$ (de gauche à droite) :

$$\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2t^2}{1+t^4} dt$$

Décomposer la fraction, calculer l'intégrale.

11. Notons $f : x \mapsto \cos x + x \sin x$, définie sur \mathbb{R} . Si $k \in \mathbb{N}$, on montre en utilisant les résultats du cours sur la continuité, qu'il existe un unique $x_k \in [\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et un unique $x_{-k} \in]-\frac{\pi}{2} - k\pi; -\frac{\pi}{2} - (k-1)\pi]$, tels que $f(x_k) = f(x_{-k}) = 0$. De plus, f ne s'annule pas sur $]x_{-1}; x_1[$.

Ceci fournit une suite strictement croissante $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ telle que f est continue sur chaque intervalle $I_k =]x_k; x_{k+1}[$ et ne s'annule pas.

La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$ est continue sur I_k et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$$

Ici, il faut se dire que, vue la forme de la fonction à primitiver (et sachant qu'on peut calculer une primitive), il faut chercher une primitive de la forme $x \mapsto \frac{P(x) \cos x + Q(x) \sin x}{\cos x + x \sin x}$, où P et Q sont des polynômes. Heureusement, les calculs ne sont pas trop désagréables.

12. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} \ln x$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elle est

$$x \mapsto \frac{2}{3} \left[(1+x)^{3/2} \ln x - 2\sqrt{1+x} - \frac{2(1+x)^{3/2}}{3} - \ln(\sqrt{1+x} - 1) + \ln(\sqrt{1+x} + 1) \right]$$

Intégrer par parties : dériver le log, primitiver la racine pour obtenir

$$\int_1^x \sqrt{1+t} \ln t dt = \frac{2}{3} [(1+t)^{3/2} \ln t]_1^x - \frac{2}{3} \int_1^x \frac{(1+t)^{3/2}}{t} dt$$

Poursuivre avec un changement de variable $t \mapsto t^2 - 1$ (de gauche à droite) :

$$\int_1^x \frac{(1+t)^{3/2}}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{2t^4}{t^2-1} dt$$

Décomposer la fraction.

13. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ est continue et admet des primitives sur chaque intervalle $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$. Sur chacun d'eux, l'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{4x-1}{2\sqrt{3}}\right)$$

14. La fonction $x \mapsto \frac{x^7}{(x^4-1)(x^2+3)}$ est continue et admet des primitives sur chaque intervalle $] -\infty; -1[$, $] -1; 1[$ et $] 1; +\infty[$. Sur chacun d'eux, une primitive est

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - \frac{1}{4} \arctan x + \frac{3\sqrt{3}}{143} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

15. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-i}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + i \arctan x$$

16. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x \sin x}$ est continue sur chaque intervalle $] k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$ et admet des primitives dessus. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{\cos x} + \frac{3}{\cos^3 x} + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

On utilise un changement de variable $t \mapsto 2 \arctan t$. On décompose la fraction obtenue.

17. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elle est

$$x \mapsto \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2+\cos x}{2-\cos x}\right|$$

Un changement de variable $t \mapsto \arccos t$ donne une fraction à décomposer.

18. La fonction $x \mapsto \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{1+\cos^4 x + \sin^4 x}$ est continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\tan^2 \frac{x}{2} + (\sqrt{3}-1) \tan \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\tan^2 \frac{x}{2} - (\sqrt{3}+1) \tan \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$$

On utilise un changement de variable $t \mapsto 2 \arctan x$, qui donne une fraction rationnelle à décomposer.

19. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\cos x}$ est continue sur $] \pi + 2k\pi; \pi + 2(k+1)\pi[$ et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \tan \frac{x}{2}$$

20. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est continue sur $] \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elle est

$$x \mapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

21. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est continue sur $]k\pi; (k+1)\pi[$ et admet des primitives dessus. L'une d'elles est

$$x \mapsto \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

22. La fonction $x \mapsto (x - \frac{a+b}{2})\sqrt{\frac{b-a}{x-a}}$ est continue sur $]a; +\infty[$ et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \sqrt{(x-a)(b-a)} \left(\frac{2x}{3} + \frac{a}{3} - b \right)$$

Une intégration par parties permet de calculer cette primitive : primitiver la racine, dériver le $x - \frac{a+b}{2}$.

23. La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{(x+1)^{3/2}}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et admet des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto -2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \operatorname{argch} x$$

Intégrer par parties : primitiver le $\frac{1}{(x+1)^{3/2}}$ et dériver le $\sqrt{x-1}$.

24. La fonction $x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ est continue sur les intervalles $] -\infty; -3[$ et $[-1; +\infty[$, et admet des primitives sur chacun d'eux. L'une d'elles est

$$x \mapsto x \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} + \operatorname{sgn}(x+1) \left(\arctan \sqrt{(x+1)(x+3)} - \frac{\ln(x+2 + \sqrt{(x+1)(x+3)})}{2} \right)$$

Intégrer par parties : primitiver le 1 et dériver l'arctangente. Ensuite, faire un changement de variable $t \mapsto \frac{2}{1-t^2} - 2$, de manière à transformer $\sqrt{\frac{t+1}{t+3}}$ en t . On se retrouve avec une fraction à décomposer.

25. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}}$ est continue sur \mathbb{R} et a des primitives sur cet intervalle. L'une d'elles est

$$x \mapsto \begin{cases} \operatorname{argsh} x + \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour l'obtenir, on commence par remarquer que

$$\forall t \neq 0 \quad \frac{1}{1 + \sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{t^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2} - \frac{1}{t^2}$$

Une primitive du premier terme s'obtient en intégrant par parties : dériver le $\sqrt{1+t^2}$ et primitiver le $\frac{1}{t^2}$. Puis faire un changement de variable $t \mapsto \operatorname{sh} t$.

26. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$ est continue sur les intervalles $] -\infty; -1[$ et $[1; +\infty[$ Elle a des primitives sur chacun d'eux. L'une d'elles est

$$x \mapsto \frac{1}{4} \left(\operatorname{argsh} x + x\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| \right)$$

Remarquer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus]-1; 1[\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{2}$

Chaque terme se primitive séparément, à l'aide d'un changement de variable en $t \mapsto \operatorname{sh} t$ et $t \mapsto \operatorname{ch} t$ respectivement.

27. La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$ est continue sur $]0; 1]$ et a des primitives sur cet intervalle. L'une d'elle est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left[\arcsin \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x} \sqrt{1-\sqrt{x}} (1-2\sqrt{x}) \right]$$

On commence par un changement de variable $t \mapsto t^4$ (de gauche à droite) :

$$\int_1^x \sqrt{\frac{1}{\sqrt{t}} - 1} dt = 4 \int_1^{\sqrt[4]{x}} \sqrt{1-t^2} t^2 dt$$

suiivi d'un changement de variable trigonométrique $t \mapsto \sin t$ (de gauche à droite) :

$$\int_1^{\sqrt[4]{x}} \sqrt{1-t^2} t^2 dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin \sqrt[4]{x}} \cos^2 t \sin^2 t dt$$

Il reste à linéariser, primitiver, et simplifier les $\sin \arcsin \sqrt[4]{x}$ et $\cos \arcsin \sqrt[4]{x}$.