

## Septième Devoir Surveillé — Corrigé

### Problème

#### Première partie : Calculs préliminaires

**I.1.a** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0; \pi]$ . On sait que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \cos kx = \operatorname{Re} e^{ikx} = (e^{ix})^k$$

donc

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} e^{ikx} = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k \right)$$

Puisque  $x \in ]0; \pi]$ , on sait que  $e^{ix} \neq 1$  donc on peut utiliser la formule qui donne la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix}}{e^{ix/2}} \frac{1 - e^{inx/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= e^{ix/2} \frac{1 - e^{inx}}{-2i \sin \frac{x}{2}} = \frac{i}{2} \frac{e^{ix/2} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Et en prenant la partie réelle de cette expression,

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \frac{-\sin \frac{x}{2} + \sin \left( (n + \frac{1}{2})x \right)}{\sin x/2} = \frac{1}{2} (-1 + g_n(x))$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in ]0; \pi] \quad f_n(x) = \frac{1}{2} (g_n(x) - 1)$$

Il y a évidemment d'autres manières de procéder, si l'on n'aime pas les nombres complexes. Par exemple, en utilisant la formule

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Alors, si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0; \pi]$ , on a

$$\begin{aligned} f_n(x) \sin \frac{x}{2} &= \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{2} \cos kx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \sin \left( \frac{2k+1}{2}x \right) + \sin \left( \frac{1-2k}{2}x \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \sin \left( \frac{2k+1}{2}x \right) - \sin \left( \frac{2k-1}{2}x \right) \right) \end{aligned}$$

Lorsqu'on sépare les sommes et décale correctement les indices, il reste

$$f_n(x) \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{2n+1}{2}x \right) - \sin \frac{x}{2} \right)$$

Ceci permet de conclure, puisque  $x \in ]0; \pi]$  et  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ .

**I.1.b**  $g_0$  est constante 1 sur  $]0; \pi]$ ; donc continue sur  $]0; \pi]$ , prolongeable par continuité en 0 en posant  $g_0(0) = 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente,

$$\forall x \in ]0; \pi] \quad g_n(x) = 2f_n(x) + 1$$

Les fonctions  $x \mapsto \cos kx$  sont toutes continues sur  $[0; \pi]$  ; donc  $g_n$  est continue sur  $]0; \pi]$ , prolongeable par continuité en 0, en posant

$$g_n(0) = 2f_n(0) + 1 = 2(n + 1)$$

$$g_n : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est continue.}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 2n + 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut aussi procéder différemment. Par exemple, si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on sait que les fonctions

$$x \mapsto \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin \frac{x}{2}$$

sont continues sur  $]0; \pi]$  et la deuxième ne s'annule pas. D'après le cours,  $g_n$  est continue sur  $]0; \pi]$ . De plus,

$$g_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2n + 1$$

Donc  $g_n$  a une limite en 0 : elle est prolongeable par continuité en ce point, en posant  $g_n(0) = 2n + 1$ .

**I.1.c** La fonction  $g_0$  est constante 1 sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , donc intégrable et son intégrale vaut  $\pi$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $g_n$  est continue, d'après la question précédente, elle est intégrable ce qui justifie l'existence de  $u_n$ . De plus, à cause du prolongement par continuité, on a

$$\forall x \in [0; \pi] \quad g_n(x) = 2f_n(x) + 1 = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx$$

Les fonctions  $x \mapsto \cos kx$  sont continues sur  $[0; \pi]$  donc intégrables et leur intégrale se calcule par primitivation :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \int_0^\pi \cos kx \, dx = \frac{1}{k} [\sin kx]_0^\pi = 0$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{[0; \pi]} g_n = \pi$$

Cette méthode est la plus simple, mais ce n'est pas la seule. Par exemple, si  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) = 2 \cos nx \sin \frac{x}{2}$$

on a  $\forall x \in ]0; \pi]$   $g_n(x) - g_{n-1}(x) = 2 \cos nx$

Comme  $g_n, g_{n-1}$  et  $x \mapsto \cos nx$  sont continues sur  $[0; \pi]$ , elles sont intégrables et

$$u_n - u_{n-1} = \int_{[0; \pi]} g_n - \int_{[0; \pi]} g_{n-1} = \int_{[0; \pi]} (g_n - g_{n-1}) = 2 \int_0^\pi \cos nx = 0$$

La suite  $u$  est bien constante.

**2.a** Les fonctions  $x \mapsto \cos \frac{x}{\alpha} - 1$  et  $x \mapsto \sin \frac{x}{2}$  sont continues sur  $[0; \pi]$ . La deuxième s'annule en 0 uniquement. Donc on sait que  $g$  est continue sur  $]0; \pi]$  au moins. De plus,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2/2\alpha^2}{x/2} = -\frac{x}{\alpha^2}$$

donc  $g$  a une limite (nulle) en 0. Pour que  $g$  soit continue, cette limite doit valoir  $g(0)$ .

En posant  $g(0) = 0$ , la fonction  $g$  est continue.

**2.b** Les fonctions  $x \mapsto \cos \frac{x}{\alpha} - 1$  et  $x \mapsto \sin \frac{x}{2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$  et la deuxième s'annule uniquement en  $\pi$ . Donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; \pi]$  au moins et

$$\forall x \in ]0; \pi] \quad g'(x) = \left( -\frac{1}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{\alpha} - 1 \right) \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

Faisons quelques calculs de développements limités :

$$\frac{1}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} \sin \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2\alpha^2} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} \sin \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2\alpha^2} + o(x^2)$$

et  $\cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{\alpha} - 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2\alpha^2} \quad \text{donc} \quad \cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{\alpha} - 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2\alpha^2} + o(x^2)$

Par suite,  $-\frac{1}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{\alpha} - 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^2}{4\alpha^2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{4\alpha^2} + o(x^2)$

Enfin,  $g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2/4\alpha^2}{x^2/4} = -\frac{1}{\alpha^2}$

Ceci montre que  $g'$  a une limite, égale à  $-\frac{1}{\alpha^2}$ , en 0. Comme  $g$  est continue sur  $[0; \pi]$ ,  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; \pi]$ , le théorème de continuité de la dérivée assure que

$g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$ .

**Deuxième partie : Étude d'une suite**

**II.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les fonctions  $f_n$ ,  $g$ ,  $x \mapsto \cos \frac{x}{\alpha}$  et  $x \mapsto \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x$  sont continues sur  $[0; \pi]$ , d'après les questions précédentes et le cours. Donc  $x \mapsto f_n(x) \cos \frac{x}{\alpha}$  et  $x \mapsto g(x) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x$  sont continues et intégrables sur  $[0; \pi]$ . Ceci justifie l'existence des suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . De même, on montre sans problème que  $v_0$  est bien défini.

**II.2** On sait que la fonction  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$ , d'après le choix fait à la question **I.2.a**. Donc  $g$  et  $g'$  sont continue sur cet intervalle fermé, et bornées d'après le cours. On prend un réel  $M$  qui majore  $|g|$  et  $|g'|$  sur cet intervalle.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les fonctions  $g$  et  $x \mapsto -\frac{2}{2n+1} \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$ , grâce à la question **I.2.b**. On peut donc utiliser le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{2}{2n+1} \left[ g(x) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi g'(x) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \, dx \\ &= -\frac{2}{2n+1} g(\pi) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi g'(x) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \, dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left| \int_0^\pi g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx \right| \leq M\pi$$

Donc en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|v_n| \leq \frac{4M}{2n+1}$$

Il existe  $A > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$ .

**II.3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a (question I.1a.) :

$$\forall x \in ]0; \pi[ \quad f_n(x) = \frac{1}{2}(-1 + g_n(x)) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

donc  $\forall x \in ]0; \pi[ \quad 2f_n(x) \cos\frac{x}{\alpha} = -\cos\frac{x}{\alpha} + \frac{\cos\frac{x}{\alpha} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$

$$= -\cos\frac{x}{\alpha} + \frac{(\cos\frac{x}{\alpha} - 1 + 1) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= -\cos\frac{x}{\alpha} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} + g(x)$$

$$2f_n(x) \cos\frac{x}{\alpha} = -\cos\frac{x}{\alpha} + g_n(x) + g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

Compte-tenu des prolongements par continuité de  $g$  et  $g_n$  faits aux questions précédentes, cette relation se généralise à  $[0; \pi]$ . Comme les fonctions à droites sont toutes continues, on peut utiliser la linéarité de l'intégrale et le théorème fondamental de l'analyse :

$$2X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos\frac{x}{\alpha} dx = -\int_0^\pi \cos\frac{x}{\alpha} dx + \int_{[0; \pi]} g_n + v_n$$

$$= -\alpha \left[ \sin\frac{x}{\alpha} \right]_{x=0}^{x=\pi} + \pi + v_n$$

Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{2} + \frac{v_n}{2}$$

**II.4** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme les fonctions  $x \mapsto \cos kx$  sont toutes intégrables, on a

$$X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos\frac{x}{\alpha} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos kx \cos\frac{x}{\alpha} dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left( \cos\left(k + \frac{1}{\alpha}\right)x + \cos\left(k - \frac{1}{\alpha}\right)x \right) dx$$

D'après le théorème fondamental du calcul intégral et par continuité du cosinus,

$$X_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\alpha}{1 + \alpha k} \sin\left(k + \frac{1}{\alpha}\right)x - \frac{\alpha}{\alpha k - 1} \sin\left(k - \frac{1}{\alpha}\right)x \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\sin\left(k + \frac{1}{\alpha}\right)\pi}{1 + \alpha k} + \frac{\sin\left(k + \frac{1}{\alpha}\right)\pi}{1 - \alpha k} \right)$$

$$X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\frac{\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 + \alpha k} + \frac{1}{1 - \alpha k} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\frac{\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 + \alpha k} + \frac{1}{1 - \alpha k} \right)$$

**Troisième partie : Calcul de I(α)**

**III.1** D'après le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction F est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  parce que  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est continue sur cet intervalle. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F'(x) = \frac{1}{1+x^\alpha}$$

Toujours à l'aide de ce théorème, les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  sont bien définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1]$ , parce que  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues sur  $]0; 1]$ . De plus,

$$\forall x \in ]0; 1] \quad \Phi(x) = -\int_1^x \varphi(t) dt \quad \Psi(x) = -\int_1^x \psi(t) dt$$

donc

$$\forall x \in ]0; 1] \quad \Phi'(x) = -\varphi(x) = -\frac{x^{\beta-1}}{1+x} \quad \Psi'(x) = -\psi(x) = -\frac{x^{-\beta}}{1+x}$$

**III.2.a** On a calculé  $F'$  à la question **III.1** et on voit qu'elle est positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Donc F est croissante. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}}.$$

**III.2.b** On a

$$\forall t \in [1; +\infty[ \quad 0 < t^\alpha \leq 1 + t^\alpha$$

donc

$$\forall t \in [1; +\infty \quad \frac{1}{1+t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Soit  $x \geq 1$  fixé. Les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  sont continues sur  $[1; x]$  donc intégrables sur cet intervalle; d'après l'inégalité ci-dessus et le théorème fondamental du calcul intégral,

$$\int_1^x \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_{t=1}^{t=x} = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right)$$

On rappelle que  $\alpha > 1$  donc  $\alpha - 1 > 0$  d'où

$$\int_1^x \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Enfin,

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

d'où

$$\forall x \geq 1 \quad F(x) \leq F(1) + \frac{1}{\alpha-1}$$

Ainsi, F est majorée sur  $[1; +\infty[$ . Donc sa limite en  $+\infty$  est finie.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \text{ existe et est finie.}$$

**III.3** On a

$$\forall t \in ]0; 1] \quad 0 \leq t \leq 1 + t \quad \text{donc} \quad 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

Par suite,

$$\forall t \in ]0; 1] \quad \varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t} \leq t^{\beta-1}$$

On fixe  $x \in ]0; 1]$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $t \mapsto t^{\beta-1}$  sont continues (donc intégrables) sur  $[x; 1]$ ; d'après l'inégalité de la moyenne et le théorème fondamental,

$$\Phi(x) = \int_x^1 \varphi(t) dt \leq \int_x^1 t^{\beta-1} dt = \left[ \frac{t^\beta}{\beta} \right]_{t=x}^{t=1} = \frac{1-x^\beta}{\beta} \leq \frac{1}{\beta}$$

La fonction  $\Phi$  est donc majorée. Mais on a vu que sa dérivée sur  $]0; 1]$  est  $-\varphi$ , qui est négative; donc  $\Phi$  est décroissante sur  $]0; 1]$ . D'après le théorème de la limite monotone,

$\Phi$  a une limite finie en 0.

**III.4.a** Soit  $a \in ]0; 1[$ . On considère la fonction

$$\begin{aligned} u: ]0; 1] &\longrightarrow ]0; 1] \\ t &\longmapsto t^{1/\alpha} = t^\beta \end{aligned}$$

$u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1]$ , à valeurs dans  $]0; 1]$  et

$$\forall t \in ]0; 1] \quad u'(t) = \beta t^{\beta-1} \quad u(1) = 1 \quad u(a^\alpha) = a$$

D'après le théorème de changement de variable,

$$\int_a^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \int_{\varphi(a^\alpha)}^{\varphi(1)} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \int_{a^\alpha}^1 \frac{\beta t^{\beta-1}}{1+t} dt = \beta \Phi(a^\alpha)$$

$$\forall a \in ]0; 1[ \quad \int_a^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta \Phi(a^\alpha)$$

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, on sait que  $a \mapsto \int_a^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est continue sur  $]0; 1]$  donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

Mais on a aussi

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^\alpha = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = J(\beta)$$

donc par composition des limites,  $\lim_{a \rightarrow 0} \Phi(a^\alpha) = J(\beta)$ . Ce qui fournit bien

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta J(\beta)$$

**III.4.b** Soit  $A \in ]1; +\infty[$ . On utilise à nouveau le théorème de changement de variable, cette fois avec la fonction

$$\begin{aligned} u: [1; +\infty[ &\longrightarrow ]0; 1] \\ t &\longmapsto t^{-1/\alpha} = t^{-\beta} \end{aligned}$$

Cette fonction est classe  $\mathcal{C}^1$ , à valeurs dans  $]0; 1[$  et

$$\forall t \in [1; +\infty[ \quad u'(t) = -\beta t^{-\beta-1} \quad u(1) = 1 \quad u(A^{-\alpha}) = A$$

Par suite,  $\int_1^A \frac{dt}{1+t^\alpha} = \int_{u(1)}^{u(A^{-\alpha})} \frac{dt}{1+t^\alpha} = - \int_1^{A^{-\alpha}} \frac{\beta t^{1-\beta}}{1+t^{-1}} dt = \beta \int_{A^{-\alpha}}^1 \frac{t^{-\beta}}{1+t} dt = \Psi(A^{-\alpha})$

Conclusion :

$$\forall A > 1 \quad \int_1^A \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta \Psi(A^{-\alpha})$$

Fixons à nouveau  $A > 1$ . D'après la relation de Chasles,

$$\int_1^A \frac{dt}{1+t^\alpha} = \int_0^A \frac{dt}{1+t^\alpha} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = F(A) - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dt}{1+t^\alpha} = I(\alpha) - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

D'autre part,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A^{-\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) = K(\beta)$$

donc par composition des limites,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \Psi(A^{-\alpha}) = K(\beta)$$

Finalement,

$$I(\alpha) - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta K(\beta)$$

**III.5.a** Soit  $x \in ]0; 1[$ . On a

$$\forall t \in [x; 1] \quad \varphi_n(t) = \sigma_n(t) t^{\beta-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+\beta-1}$$

Les fonctions  $t \mapsto (-1)^k t^{k+\beta-1}$  sont toutes continues (donc intégrales) sur  $[x; 1]$ . D'après la relation de Chasles et le théorème fondamental,

$$\int_x^1 \varphi_n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_x^1 t^{k+\beta-1} dt = \sum_{k=0}^n \left[ \frac{t^{k+\beta}}{k+\beta} \right]_{t=x}^{t=1}$$

Tous calculs faits,

$$\int_x^1 \varphi_n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1-x^{k+\beta}}{k+\beta}$$

De la même manière,

$$\int_x^1 \psi_n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1-x^{k+1-\beta}}{k+1-\beta}$$

**III.5.b** Si  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $k+\beta > 0$  car  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  et  $\alpha > 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{k+\beta} = 0$$

D'après le théorème d'addition des limites et la formule obtenue à la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \varphi_n(t) dt \text{ existe et vaut } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\beta}$$

De même, si  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $k+1-\beta > 0$  car  $0 < \beta < 1$  puisque  $\alpha > 1$ . D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{k+1-\beta} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \psi_n(t) dt \text{ existe et vaut } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1-\beta}.$$

**III.6.a** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0; 1]$ . Alors  $-t \neq 1$  et l'on sait que

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 + t}$$

donc

$$\left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| = \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; 1] \quad \left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| \leq t^{n+1}}$$

**III.6.b** On fixe  $x \in ]0; 1[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\forall t \in [x; 1] \quad \varphi_n(t) - \varphi(t) = \sigma_n(t)t^{\beta-1} - \frac{t^{\beta-1}}{1+t} = \left( \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right) t^{\beta-1}$$

d'où

$$\forall t \in [x; 1] \quad |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq t^{n+1} t^{\beta-1} = t^{\beta+n}$$

Parce que  $\varphi_n$ ,  $\varphi$  et  $t^{\beta+n}$  sont continues (donc intégrables) sur  $[x; 1]$ , l'inégalité de la moyenne et la croissance de l'intégrale fournissent

$$\left| \int_x^1 (\varphi_n(t) - \varphi(t)) dt \right| \leq \int_x^1 t^{\beta+n} dt = \left[ \frac{t^{\beta+n+1}}{\beta+n+1} \right]_{t=x}^1 = \frac{1 - x^{\beta+n+1}}{\beta+n+1} \leq \frac{1}{\beta+n+1}$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\left| \int_x^1 \varphi_n(t) dt - \Phi(x) \right| \leq \frac{1}{\beta+n+1}$$

Cette inégalité est vraie pour tout  $x$ , et on sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \varphi_n(t) dt$  et  $\Phi(x)$  existent et valent  $J_n(\beta)$  et  $J(\beta)$ . D'après le théorème de passage à la limite dans les inégalités,

$$|J_n(\beta) - J(\beta)| \leq \frac{1}{\beta+n+1}$$

Mais cette inégalité est vraie pour tout entier  $n$ . Le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(\beta) \text{ existe et vaut } J(\beta).}$$

**III.6.c** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a vu à la question **III.5.b** que

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\beta} \quad \text{et} \quad K_n(\beta) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1-\beta}$$

On fait un petit changement d'indice dans la somme qui donne  $K_n(\beta)$  :

$$K_n(\beta) = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k-\beta}$$

et on calcule  $J_n(\beta) + K_n(\beta)$ , en se rappelant que  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  :



$$\begin{aligned}
 J_n(\beta) + K_n(\beta) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k + \frac{1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k - \frac{1}{\alpha}} \\
 &= \alpha \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} - \alpha \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{\alpha k - 1} \\
 &= \alpha + \alpha \sum_{k=1}^n (-1)^k \left( \frac{1}{1 + \alpha k} + \frac{1}{1 - \alpha k} \right) + \frac{(-1)^{n+1} \alpha}{1 - \alpha(n+1)}
 \end{aligned}$$

À l'aide de la formule obtenue à la question **II.4**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n(\beta) + K_n(\beta) = \alpha + \frac{(-1)^{n+1} \alpha}{1 - \alpha(n+1)} + \frac{2X_n}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}$$

**III.6.d** Il est temps de recoller tous les morceaux. D'une part, on a vu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(\beta) = J(\beta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\beta) = K(\beta)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (J_n(\beta) + K_n(\beta)) = J(\beta) + K(\beta)$$

D'autre part, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{1}{2} \left( \pi - \alpha \sin \frac{\pi}{\alpha} \right)$$

donc

$$\begin{aligned}
 J(\beta) + K(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (J_n(\beta) + K_n(\beta)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha + \frac{(-1)^{n+1} \alpha}{1 - \alpha(n+1)} + \frac{2X_n}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} \right) \\
 &= \alpha + \frac{\pi - \alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

On garde cette formule de côté ; on se rappelle que (questions **III.4.a** et **b**) :

$$\beta J(\beta) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} \quad \beta K(\beta) = I(\alpha) - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

Par suite,

$$I(\alpha) = \beta(J(\beta) + K(\beta)) = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}$$

On a gagné!

$$I(\alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$$