

Sixième devoir surveillé

Le 07 Juillet 2014

Instructions : Vous porterez une attention particulière au soin et à la présentation. La rédaction doit être claire et les notations rigoureuses ; votre travail doit être propre.

Faites attention, s'il vous plaît, à vérifier l'existence des objets que vous utilisez (intégrale, dérivée, limite, etc.).

Vous pouvez utiliser les résultats des questions précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire. Les calculs de la première partie sont faciles, et sont utilisés dans le reste du problème. Les parties 2 et 3 sont quasiment indépendantes (sauf les dernières questions de la partie 3). Bon courage.

Partie	Partie I					Partie II				
Points	0.5	1	1	0.5	2	0.5	2	2	1.5	

Partie III												
Points	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1

Dans tout le problème, α est un nombre réel fixé strictement supérieur à 1. Le but est de calculer $I(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Première partie : Calculs préliminaires (5 points)

On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g_n :]0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n \cos kx \qquad \qquad \qquad x \mapsto \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin x/2}$$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0; \pi] \quad f_n(x) = \frac{1}{2}(-1 + g_n(x))$
 (b) Pour tout entier n , montrer que g_n est continue, prolongeable par continuité en 0. L'application prolongée est encore notée g_n .
 (c) Si $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_{]0; \pi]} g_n$. Après avoir justifié l'existence de u_n , montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

$$2. \text{ Posons } \quad \forall x \in]0; \pi] \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x/\alpha) - 1}{\sin(x/2)} & \text{si } x \neq 0 \\ ?? & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Quelle valeur faut-il donner à $g(0)$ pour que g soit continue ? On suppose maintenant avoir choisi $g(0)$ de cette manière.
- Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; \pi]$ et calculer g' sur cet ensemble.

Deuxième partie : Étude d'une suite (6 points)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos \frac{x}{\alpha} dx$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \int_0^\pi g(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$

- Justifier l'existence des suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$$

Indication : On pourra intégrer par parties.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{\alpha} + \frac{1}{2} v_n + \frac{\pi}{2}$

Étudier la convergence de X et donner sa limite si elle existe.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{1+\alpha k} + \frac{1}{1-\alpha k} \right)$

Troisième partie : Calcul de $I(\alpha)$ (14 points)

On note $\beta = \frac{1}{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^\alpha}$

et $\forall t \in]0; 1] \quad \varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t} \quad \Psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$

et enfin $\forall x \in]0; 1] \quad \Phi(x) = \int_x^1 \varphi(t) dt \quad \Psi(x) = \int_x^1 \Psi(t) dt$

- Justifier l'existence des fonctions F, Φ et Ψ , montrer qu'elles sont \mathcal{C}^1 et calculer leurs dérivées.

2. On souhaite montrer que F a une limite finie en $+\infty$.

(a) Montrer que F a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

(b) Montrer que $\forall t \in [1; +\infty[\quad \frac{1}{1+t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$

et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ est finie. Cette limite sera notée $I(\alpha)$.

3. Par un raisonnement similaire, montrer que Φ a une limite finie en 0. On pourrait démontrer la même chose pour Ψ , mais je ne demande pas de le faire. Ces limites sont notées $J(\beta)$ et $K(\beta)$.

4. (a) Montrer que $\forall a \in]0; 1[\quad \int_a^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta \Phi(a^\alpha)$

En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta J(\beta)$

(b) Montrer que $\forall A \in]1; +\infty[\quad \int_1^A \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta \Psi(A^{-\alpha})$

En déduire que $I(\alpha) - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \beta K(\beta)$

5. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k \quad \varphi_n(t) = \sigma_n(t) t^{\beta-1} \quad \psi_n(t) = \sigma_n(t) t^{-\beta}$

et on fixe un entier n non nul.

(a) Soit $x \in]0; 1[$. Calculer, sous la forme d'une somme,

$$\int_x^1 \varphi_n(t) dt \quad \text{et} \quad \int_x^1 \psi_n(t) dt$$

(b) En déduire que $J_n(\beta) = \lim_{\text{déf } x \rightarrow 0} \int_x^1 \varphi_n(t) dt$ et $K_n(\beta) = \lim_{\text{déf } x \rightarrow 0} \int_x^1 \psi_n(t) dt$

existent et sont finies. Donner leur valeur (sous forme d'une somme).

6. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; 1] \quad \left| \sigma_n(t) - \frac{1}{t+1} \right| \leq t^{n+1}$

(b) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(\beta) = J(\beta)$. De la même manière, on peut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\beta) = K(\beta)$, mais la preuve n'est pas demandée.

Indication : On peut, à $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; 1[$ fixés, majorer $\left| \int_x^1 (\varphi_n(t) - \varphi(t)) dt \right|$.

(c) Si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, exprimer $J_n(\beta)$ et $K_n(\beta)$ en fonction de X_n et de α , et obtenir que

$$J_n(\beta) + K_n(\beta) = \alpha + \frac{(-1)^{n+1} \alpha}{1 - \alpha(n+1)} + \frac{2X_n}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}$$

(d) En déduire que $I(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}$.

Bonnes vacances !