

Cinquième Devoir Surveillé — Corrigé

Exercice

1 Il suffit de faire les calculs pour trouver

$$M^2 = \begin{bmatrix} 19 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & 19 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & 19 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & 19 \end{bmatrix} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 31 & 31 & 31 & -94 \\ 31 & 31 & -94 & 31 \\ 31 & -94 & 31 & 31 \\ -94 & 31 & 31 & 31 \end{bmatrix}$$

2 Il est clair que (I_4, M) est libre (ces matrices ne sont pas proportionnelles). On voit aussi que (I_4, M, M^2) est libre parce que

$$\text{Vect}(I_4, M) = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} a+b & b & b & -4b \\ b & a+b & -4b & b \\ b & -4b & a+b & b \\ -4b & b & b & a+b \end{array} \right] \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et M^2 n'est pas dans cet ensemble.

Donc, montrer que (I_4, M, M^2, M^3) est liée équivaut à montrer que M^3 est combinaison linéaire de I_4, M et M^2 . Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$aI_4 + bM + cM^2 = \begin{bmatrix} a+b+19c & b-6c & b-6c & -4b-6c \\ b-6c & a+b+19c & -4b-6c & b-6c \\ b-6c & -4b-6c & a+b+19c & b-6c \\ -4b-6c & b-6c & b-6c & a+b+19c \end{bmatrix}$$

Par suite,

$$M^3 = aI_4 + bM + cM^2 \iff \begin{cases} a + b + 19c = 31 \\ b - 6c = 31 \\ 4b + 6c = 94 \end{cases}$$

$$\iff (a, b, c) = (25, 25, -1)$$

La famille (I_4, M, M^2, M^3) est liée et $M^3 = 25I_4 + 25M - M^2$.

On en déduit alors que

$$I_4 = \frac{1}{25}(M^3 + M^2 - 25M) = M \frac{M^2 + M - 25I_4}{25}$$

donc

$$M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{M^2 + M - 25I_4}{25} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3 On étudie, par exemple, le rang de la matrice $[v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$. Les matrices suivantes ont le même rang, parce que les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes ne changent pas le rang :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 + \text{L}_2]{\text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 + \text{L}_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 + \text{L}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est clairement de rang 4. Donc la matrice $[v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$ aussi, ce qui montre que (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre. Comme \mathbb{R}^4 est de dimension 4, c'est une base.

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.$$

4 Par définition, la matrice de passage P de \mathcal{B}_c vers \mathcal{B} est la matrice

$$P = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour calculer P^{-1} , on a plusieurs options : faire des opérations élémentaires sur les lignes de P et sur celles de I_n ; utiliser la formule de la comatrice (pour une matrice 4×4 , le temps de calcul est acceptable) ; ou bien calculer les coordonnées de (e_1, e_2, e_3, e_4) dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) (parce que P^{-1} est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_c).

Ici, il est assez facile de voir que

$$\begin{aligned} v_3 + v_4 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & 2v_1 + v_3 + v_4 &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 4e_1 & -2v_1 + v_3 + v_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4e_4 \\ -v_3 + v_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & 2v_2 - v_3 + v_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 4e_2 & -2v_2 - v_3 + v_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4e_3 \end{aligned}$$

Il vient

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5 Par un calcul, on obtient

$$Mv_1 = 5v_1 \quad Mv_2 = 5v_2 \quad Mv_3 = -5v_3 \quad Mv_4 = -v_4$$

En notant $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}} M$, il vient

$$M' = \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 5 & & \\ & & -5 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

6 On a déjà vu que M est inversible. Son rang est 4, son noyau est $\{0\}$.

7 On sait que $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}} M$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M'^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}} M^n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M'^n = P^{-1}M^nP$$

Mais comme M' est diagonale, ses puissances sont faciles à calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M'^n = \begin{bmatrix} 5^n & & & \\ & 5^n & & \\ & & (-5)^n & \\ & & & (-1)^n \end{bmatrix} = P^{-1}M^nP$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = PM'^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^n & & & \\ & 5^n & & \\ & & (-5)^n & \\ & & & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Après calculs, on trouve que pour tout entier n , M^n vaut

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n & (-1)^n - (-5)^n & (-1)^n - (-5)^n & -2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n \\ (-1)^n - (-5)^n & 2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n & -2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n & (-1)^n - (-5)^n \\ (-1)^n - (-5)^n & -2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n & 2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n & (-1)^n - (-5)^n \\ -2 \cdot 5^n + (-5)^n + (-1)^n & (-1)^n - (-5)^n & (-1)^n - (-5)^n & (-1)^n + (-5)^n \end{bmatrix}$$

8 Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$. Après calcul, on voit que

$$AM' - M'A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10a_{1,3} & 6a_{1,4} \\ 0 & 0 & 10a_{2,3} & 6a_{2,4} \\ -10a_{3,1} & -10a_{3,2} & 0 & -4a_{3,4} \\ -6a_{4,1} & -6a_{4,2} & 4a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}$$

Par suite, A commute avec M' si, et seulement si, les coefficients suivants sont nuls :

$$a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,4}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}$$

Autrement dit, l'ensemble des matrices qui commutent avec M' est

$$\left\{ \left[\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array} \right] \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

Ceci permet d'en déduire facilement l'ensemble des matrices qui commutent avec M : en effet, si $A \in M_4(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} A \text{ commute avec } MAM = MA &\iff APM'P^{-1} = PM'P^{-1}A \\ &\iff (P^{-1}AP)M' = M'(P^{-1}AP) \\ &\iff P^{-1}AP \text{ commute avec } M' \end{aligned}$$

Cet ensemble est donc

$$\left\{ P \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} P^{-1} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème

I.1 $R_n(p)$ n'est pas un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ parce qu'il ne contient pas 0. En effet, $0^p = 0 \neq I_n$.

I.2 Soit $A \in R_n(p)$. On a $I_n = A^p = A \cdot A^{p-1}$ donc

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^p.$$

De plus,

$$(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = I_n$$

d'où

$$A^{-1} \in R_n(p)$$

I.3 Soit $A \in R_n(p)$. Soit B une matrice semblable à A : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.
Alors

$$B^p = (Q^{-1}AQ)^p = Q^{-1}A^pQ = Q^{-1}I_nQ = Q^{-1}Q = I_n$$

$$\text{Toute matrice semblable à } A \text{ est aussi dans } R_n(p).$$

I.4 Soit $A \in D_n(\mathbb{R})$. On note a_1, \dots, a_n les coefficients diagonaux de A :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

Alors

$$A^p = \begin{bmatrix} a_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^p \end{bmatrix}$$

Il vient

$$A \in R_n(p) \iff (\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad a_k^p = 1)$$

L'équation « $x^p = 1$ » a pour ensemble de solutions, dans \mathbb{R} , $\{1\}$ si p est impair et $\{-1; 1\}$ si p est pair.
Donc

$$R_n(p) \cap D_n(\mathbb{R}) = \{I_n\} \text{ si } p \text{ est impair.}$$

$$R_n(p) \cap D_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \mid a_1, \dots, a_n \in \{-1; 1\} \right\} \text{ si } p \text{ est pair.}$$

I.5 Soit $q \geq 2$ un entier. On note $d = \text{pgcd}(p, q)$. On sait que $d|p$ et $d|q$: il existe des entiers p_1 et q_1 tels que $p = dp_1$ et $q = dq_1$. De plus, d'après Bezout, il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que $d = up + vq$.
Soit $A \in R_n(d)$. On a $A^d = I_n$ donc

$$A^p = A^{dp_1} = (A^d)^{p_1} = I_n^{p_1} = I_n$$

De même, $A^q = I_n$. Donc $A \in R_n(p) \cap R_n(q)$.

Réciproquement, soit $A \in R_n(p) \cap R_n(q)$. On sait donc que $A^p = A^q = I_n$. Alors

$$A^d = A^{up+vw} = (A^p)^u (A^q)^v = I_n$$

et $A \in R_n(d)$.

$$R_n(p) \cap R_n(q) = R_n(d)$$

II.1.a Comme $A \in R_2(2)$, on sait que $A^2 = I_2$. D'après le cours, A est une symétrie de \mathbb{R}^2 , et donc

$$\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A + I_3)$$

II.1.b Comme $A \neq I_2$, c'est que $A - I_2 \neq 0$ donc $\text{Ker}(A - I_2)$ n'est pas \mathbb{R}^2 . De même, $\text{Ker}(A + I_2) \neq \mathbb{R}^2$. Ces deux espaces ne sont donc pas de dimension 2 : ils sont de dimension 0 ou 1. Mais

$$\dim \text{Ker}(A - I_2) + \dim \text{Ker}(A + I_2) = \dim (\text{Ker}(A - I_2) \oplus \text{Ker}(A + I_2)) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

Ils sont donc tous les deux de dimension 1.

On prend (u_1) une base de $\text{Ker}(A - I_2)$ et (u_2) une base de $\text{Ker}(A + I_2)$. Comme ces deux espaces sont supplémentaires, $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 . De plus,

$$Au_1 = u_1 \quad \text{et} \quad Au_2 = -u_2$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

II.1.c Notons P la matrice de passage de la base canonique vers \mathcal{B} : il existe des réels a, b, c, d tels que

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

P est inversible donc son déterminant n'est pas nul : $ad - bc \neq 0$. Et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Les formules de passage donnent

$$A = P (\text{Mat}_{\mathcal{B}} A) P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Après calculs,

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{bmatrix}$$

II.1.d Réciproquement, soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On note

$$M = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{bmatrix}$$

Alors
$$M^2 = \frac{1}{(ad - bc)^2} \begin{bmatrix} (ad + bc)^2 + 4abcd & 0 \\ 0 & -2abcd + (ad + bc)^2 \end{bmatrix} = I_2$$

donc $M \in R_2(2)$.

De plus, on sait déjà que I_2 et $-I_2$ sont dans $R_2(2)$ (en effet, il ne faut pas oublier qu'on a supposé que $A \notin \{-I_2; I_2\}$). Donc

$$R_2(2) = \{-I_2; I_2\} \cup \left\{ \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc \neq 0 \right\}$$

II.2 On prend
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

On calcule facilement que $A^2 = B^2 = I_2$, c'est-à-dire que A et B sont dans $R_2(2)$. Mais on voit que

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (AB)^2 = \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$$

donc $AB \notin R_2(2)$. Ceci montre que $R_2(2)$ n'est pas un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

III.1 On prend $x \in F \cap G$. Comme $x \in F$, on a $Ax = x$. Et comme $x \in G$, on sait que $A^2x + Ax + x = 0$. Il vient $3x = 0$ donc $x = 0$.

F et G sont en somme directe.

III.2 Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Posons

$$y = \frac{x + Ax + A^2x}{3} \quad z = \frac{2x - Ax - A^2x}{3}$$

On a
$$Ay = \frac{Ax + A^2x + A^3x}{3} = \frac{x + Ax + A^2x}{3} = y$$

parce qu'on sait que $A^3 = I_2$. Donc $y \in \text{Ker}(A - I_2)$. On calcule aussi que

$$Az = \frac{2Ax - A^2x - A^3x}{3} = \frac{-x + 2Ax - A^2x}{3} \quad A^2z = \frac{-Ax + 2A^2x - A^3x}{3} = \frac{-x - Ax + 2A^2x}{3}$$

et il vient
$$z + Az + A^2z = 0$$

c'est-à-dire que $z \in \text{Ker}(A^2 + A + I_2)$.

De plus, on vérifie facilement que $x = y + z$, ce qui montre que $F + G = \mathbb{R}^2$. On sait déjà que ces espaces sont en somme directe, donc

F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .

III.3 Si F est de dimension 2, c'est que $F = \mathbb{R}^2$. Donc $A = I_2$.

III.4 On suppose que F est de dimension 1. Comme G est un supplémentaire de F, il est aussi de dimension 1. On prend (x_1) base de F et (x_2) base de G. On a

$$(A^2 + A + I_2)Ax_2 = A \underbrace{(A^2 + A + I_2)x_2}_{=0} = 0$$

donc $Ax_2 \in G$. Comme x_2 engendre G, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Ax_2 = \lambda x_2$. On a ensuite $A^2x_2 = \lambda^2 x_2$ et

$$0 = (A^2 + A + I_2)x_2 = (\lambda^2 + \lambda + 1)x_2$$

Mais $x_2 \neq 0$ donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. C'est absurde, puisque

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

F n'est pas de dimension 1.

III.5.a Remarquons que, comme F est de dimension 0, c'est que $G = \mathbb{R}^2$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad A^2x + Ax + x = 0$$

Montrons que (e_1, Ae_1) est libre. On prend $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + bAe_1 = 0$. En multipliant par A, il vient

$$aAe + bA^2e_1 = 0$$

Mais $A^2e_1 = -e_1 - Ae_1$ donc on a le système :

$$\begin{cases} ae_1 + bAe_1 = 0 \\ -be_1 + (a - b)Ae_1 = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première relation par $a - b$, la deuxième par $-b$, et on les ajoute pour obtenir :

$$(a(a - b) + b^2)e_1 = 0$$

Comme $e_1 \neq 0$, c'est que $a^2 + b^2 - ab = 0$. Mais

$$a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$$

Il vient $\frac{3b^2}{4} = 0$ et $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 0$

parce que ce sont tous les deux des réels positifs. On en déduit que $b = 0$ et $a = 0$. Donc (e_1, Ae_1) est libre ; comme \mathbb{R}^2 est de dimension 2,

(e_1, Ae_1) est une base de \mathbb{R}^2 .

III.5.b Il existe des réels a, b tels que

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Comme $\mathcal{B} = (e_1, Ae_1)$ est libre, on doit avoir $b \neq 0$ (si $b = 0$, alors Ae_1 est proportionnel à e_1). De plus, $G = \mathbb{R}^2$ parce que $F = \{0\}$ donc

$$(A^2 + A + I_2)e_1 = 0 \quad \text{et donc} \quad A(Ae_1) = A^2e_1 = -Ae_1 - e_1$$

Par suite, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

On note P la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) vers la base $\mathcal{B} = (e_1, Ae_1)$. On a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après les formules de passage,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}A = P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}A)P^{-1}$$

Après calcul,

$$A = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{bmatrix}$$

III.6 On a vu que F est de dimension 0 ou 2. S'il est de dimension 2, c'est que $A = I_2$. S'il est de dimension 0, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ tels que

$$A = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{bmatrix}$$

Ceci montre $\mathbf{R}_2(3) \subset \{I_2\} \cup \left\{ \frac{1}{b} \begin{bmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0 \right\}$

L'inclusion réciproque est triviale à vérifier (simple calcul). Donc

$$\mathbf{R}_2(3) = \{I_2\} \cup \left\{ \frac{1}{b} \begin{bmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0 \right\}$$