

Cinquième Devoir Surveillé

Le 06 Juin 2014

Toutes les parties de ce devoir sont indépendantes. Essayez de faire le plus de choses possible, correctement, et vérifiez vos calculs. Bon courage.

	Exercice (12 points)							
Question	1	2	3	4	5	6	7	8
Points	1	2	1	2	1	1	2	2

	Problème (17 points)																
Partie	Partie I					Partie II					Partie III						
Points	0.5	1	0.5	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0.5	1.5	1.5	1	0.5

Exercice

On note $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

La base canonique de \mathbb{R}^4 est notée $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et on pose

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer M^2 et M^3 .
2. Montrer que (I_4, M, M^2, M^3) est liée dans $M_4(\mathbb{R})$ et donner une relation de dépendance linéaire entre ces 4 matrices. Utiliser ce résultat pour montrer que M est inversible et pour calculer M^{-1} .
3. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de \mathbb{R}^4 , notée \mathcal{B} .
4. Calculer la matrice de passage P de \mathcal{B}_c vers \mathcal{B} . Calculer ensuite P^{-1} .
5. Calculer Mv_1, \dots, Mv_4 et en déduire la matrice de M dans la base \mathcal{B} , notée M' .
6. Quel est le rang de M ? Son noyau? M est-elle inversible?
7. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec M' . En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec M (ne faites pas les calculs, donnez juste cet ensemble en fonction de P et P^{-1}).

Problème

On fixe un entier $n \geq 2$. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales dans $M_n(\mathbb{R})$. On pose enfin

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad R_n(p) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n\}$$

I. Généralités

Dans cette partie, $p \geq 2$ est un entier fixé.

1. $R_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in R_n(p)$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in R_n(p)$.
3. Soit $A \in R_n(p)$. Montrer que toute matrice semblable à A est aussi dans $R_n(p)$.
4. Déterminer $R_n(p) \cap D_n(\mathbb{R})$.
5. Soit $q \geq 2$ un entier. On note $d = \text{pgcd}(p, q)$. Montrer que $R_n(p) \cap R_n(q) = R_n(d)$.

II. Étude de $R_2(2)$

1. Soit $A \in R_2(2)$ tel que $A \notin \{I_2, -I_2\}$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(A - I_2) \oplus \text{Ker}(A + I_2) = \mathbb{R}^2$.
 - (b) Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de A est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
 - (c) En déduire qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{bmatrix}$$

- (d) Vérifier, réciproquement, qu'une matrice de cette forme est dans $R_2(2)$ et donner, finalement, l'ensemble $R_2(2)$.
2. Montrer que $R_2(2)$ n'est pas un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

III. Étude de $R_2(3)$

Dans cette partie, on fixe $A \in R_2(3)$. On considère les sous-espaces de \mathbb{R}^2 :

$$F = \text{Ker}(A - I_2) \quad G = \text{Ker}(A^2 + A + I_2)$$

1. Montrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\frac{x + Ax + A^2x}{3} \in F \quad \text{et} \quad \frac{2x - Ax - A^2x}{3} \in G$$

et en déduire que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .

3. Que peut-on dire si F est de dimension 2 ?
4. On suppose que F est de dimension 1. Montrer qu'il existe (x_1, x_2) base de \mathbb{R}^2 telle que

$$F = \text{Vect } x_1 \quad G = \text{Vect } x_2$$

Montrer alors que $Ax_2 \in G$ et obtenir une contradiction.

5. On suppose que F est de dimension 0. On note $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Montrer que (e_1, Ae_1) est une base de \mathbb{R}^2 .
- (b) En déduire qu'il existe des réels a et b , avec $b \neq 0$, tels que

$$A = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{bmatrix}$$

6. Conclure : Déterminer $R_2(3)$.