

Quatrième Devoir Surveillé — Corrigé

Premier problème

1.a On sait que

$$e^t \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + o(t)$$

donc

$$e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$$

et

$$f_\alpha(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{te^{t\alpha}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

Donc f_α a pour limite 1 en 0 :

$$f_\alpha \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ en posant } f_\alpha(0) = 1.$$

1.b On a

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f_\alpha(t) = \frac{te^{t\alpha}}{e^t - 1} \neq 0$$

et $f_\alpha(0) = 1 \neq 0$. Donc on peut définir la fonction $\frac{1}{f_\alpha}$ sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{f_\alpha(t)} = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} e^{-t\alpha} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + o(t^{n+1})$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{e^t - 1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{k-1}}{k!} + o(t^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{(k+1)!} + o(t^n) \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ a donc un $DL_n(0)$. La fonction $t \mapsto e^{-t\alpha}$ aussi. D'où

$$\frac{1}{f_\alpha} \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et a un DL en } 0 \text{ à tout ordre.}$$

1.c Comme la fonction $\frac{1}{f_\alpha}$ a un DL en 0 à tout ordre, et qu'elle n'est pas nulle en 0, on en déduit que

$$f_\alpha = \frac{1}{1/f_\alpha} \text{ a un DL en } 0 \text{ à tout ordre.}$$

Par définition, $B_0(\alpha)$ est le terme de degré 0 du $DL_0(0)$ de f_α . Mais on a vu que $f_\alpha \xrightarrow{0} 1$ donc

$$f_\alpha(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$$

Il vient

$$B_0(\alpha) = 1$$

1.d On sait que $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \frac{e^t - 1}{t} f_\alpha(t) = e^{t\alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La partie principale du $DL_n(0)$ de f_α est

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{B_k(\alpha)}{k!} X^k$$

Celle du $DL_n(0)$ de $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est

$$Q = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)!}$$

D'après le cours, la partie principale du $DL_n(0)$ de $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t} f_\alpha(t)$ est le polynôme PQ coupé au degré n . Mais

$$\begin{aligned} (PQ)|_n &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k P_j Q_{k-j} \right) X^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \frac{B_j(\alpha)}{j!} \frac{1}{(k+1-j)!} \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!} B_j(\alpha) \right) \frac{X^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k C_{k+1}^j B_j(\alpha) \right) \frac{X^k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

D'autre part, $e^{t\alpha} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} t^k + o(t^n)$

Par unicité du $DL_n(0)$ de $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t} f_\alpha(t)$, on peut identifier les coefficients de degré n :

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^n C_{n+1}^j B_j(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!}$$

donc $\sum_{j=0}^n C_{n+1}^j B_j(\alpha) = (n+1) \alpha^n$

Enfin, n était un entier quelconque donc on a en fait montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=0}^n C_{n+1}^j B_j(\alpha) = (n+1) \alpha^n$$

1.e Cette formule se récrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad C_{n+1}^n B_n(\alpha) = (n+1) \alpha^n - \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+1}^j B_j(\alpha)$$

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n(\alpha) = \alpha^n - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+1}^j B_j(\alpha)$

Ceci permet de calculer les $(B_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, puisqu'on connaît $B_0(\alpha)$, qui est égal à 1. On obtient :

$$B_1(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} C_2^0 B_0(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}$$

$$B_2(\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{3} \left(C_3^0 B_0(\alpha) + C_3^1 B_1(\alpha) \right) = \alpha^2 - \frac{1}{3} \left(1 + 3\alpha - \frac{3}{2} \right) = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6}$$

On donne directement le résultat pour $B_3(\alpha)$, $B_4(\alpha)$ et $B_5(\alpha)$:

$$B_3(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$B_4(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(\alpha) = \alpha^5 - \frac{5\alpha^4}{2} + \frac{5\alpha^3}{3} - \frac{\alpha}{6}$$

1.f Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f_{\alpha+1}(t) - f_\alpha(t) = \frac{te^{(\alpha+1)t}}{e^t - 1} - \frac{te^{\alpha t}}{e^t - 1} = \frac{te^{\alpha t}}{e^t - 1} (e^t - 1) = te^{\alpha t}$$

donc

$$\begin{aligned} f_{\alpha+1}(t) - f_\alpha(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} t \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k t^k}{k!} + o(t^{n-1}) \right) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k t^{k+1}}{k!} + o(t^n) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{k-1} t^k}{(k-1)!} + o(t^n) \end{aligned}$$

Mais le terme de degré n du $DL_n(0)$ de $f_{\alpha+1} - f_\alpha$ est aussi $\frac{B_n(\alpha+1) - B_n(\alpha)}{n!} t^n$. Par unicité du $DL_n(0)$,

$$\frac{B_n(\alpha+1) - B_n(\alpha)}{n!} = \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}$$

Comme n était quelconque, on a prouvé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n(\alpha+1) - B_n(\alpha) = n\alpha^{n-1}}$$

2 On a montré à la question **1.d** que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad B_n(\alpha) = \alpha^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k(\alpha)$$

Comme B_0 est la fonction constante 1, une récurrence immédiate prouve alors que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, B_n \text{ est une fonction polynomiale à coefficients dans } \mathbb{Q}, \text{ de degré } n.}$$

3 On continue à utiliser la formule de la question **1.d** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = X^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k$$

On dérive pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad B'_n &= nX^{n-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B'_k \\ \frac{B'_n}{n} &= X^{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B'_k \end{aligned}$$

Mais on calcule que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n+1}{k} C_n^{k-1}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \frac{B'_n}{n} = X^{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+1}{k} C_n^{k-1} B'_k = X^{n-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^{k-1} \frac{B'_k}{k}$

| On ne tient pas compte du terme en B'_0 , simplement parce que $B_0 = 1$ et $B'_0 = 0$.

Un changement d'indice dans la somme donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \frac{B'_n}{n} = X^{n-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{B'_{k+1}}{k+1}$$

ou encore

| | |
|------------------------------|--|
| $\forall n \in \mathbb{N}^*$ | $\frac{B'_{n+1}}{n+1} = X^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k \frac{B'_{k+1}}{k+1}$ |
|------------------------------|--|

4 On définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \frac{B'_{n+1}}{n+1}$$

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k P_k$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n - P_n = - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k (B_k - P_k)$$

Donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $B_n - P_n$ est combinaison linéaire de $B_0 - P_0, \dots, B_{n-1} - P_{n-1}$.

Mais on vérifie facilement que :

$$P_0 = \frac{B'_1}{1} = 1 = B_1 \quad P_1 = \frac{B'_2}{2} = \frac{2X-1}{2} = X - \frac{1}{2} = B_1$$

donc

$$B_0 - P_0 = 0 \quad B_1 - P_1 = 0$$

Par une récurrence immédiate, les $(B_n - P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tous nuls.

| |
|---|
| $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{B'_{n+1}}{n+1} = B_n$ |
|---|

Cette formule permet de vérifier que les calculs faits à la question 1.e sont corrects puisque

| | |
|---|---|
| $B_0 = 1$ | |
| $B_1 = X - \frac{1}{2}$ | $B'_1 = 1$ |
| $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ | $B'_2 = 2X - 1 = 2B_1$ |
| $B_3 = X^3 - \frac{3X^2}{2} + \frac{X}{2}$ | $B'_3 = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2} = 3B_2$ |
| $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$ | $B'_4 = 4X^3 - 6X^2 + 2X = 4B_3$ |
| $B_5 = X^5 - \frac{5X^4}{2} + \frac{5X^3}{3} - \frac{X}{6}$ | $B'_5 = 5X^4 - 10X^3 + 5X^2 - \frac{1}{6} = 5B_4$ |

5 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On utilise le résultat de la question 1.f :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = (n+1)k^n$$

Par suite,
$$\sum_{k=0}^m (n+1)k^n = \sum_{k=0}^m (B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)) = B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)$$

et
$$\sum_{k=0}^m k^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)}{n+1}$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^m k^4 = \frac{B_5(m+1) - B_5(0)}{5} = \frac{m+1}{30} (6(m+1)^4 - 15(m+1)^3 + 10(m+1)^2 - 1)$$

Deuxième problème

1 Soit $f \in T_n$. Il existe des réels a_0, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \sin x = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$

donc
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k) e^{-ikx} \\ &= \frac{e^{-inx}}{2} \left(2a_0 e^{inx} + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) e^{i(n+k)x} + \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k) e^{i(n-k)x} \right) \\ f(x) &= \frac{e^{-inx}}{2} \left(2a_0 e^{inx} + \sum_{k=n+1}^{2n} (a_{k-n} - ib_{k-n}) e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n-k} + ib_{n-k}) e^{ikx} \right) \end{aligned}$$

En posant
$$P = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n-k} + ib_{n-k}) X^k + 2a_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} (a_{k-n} - ib_{k-n}) X^k \right) \in \mathbb{C}_{2n}[X]$$

on a bien
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$$

2 Soit $f \in T_n$; on suppose qu'il existe x_0, \dots, x_{2n} dans $[0; 2\pi[$, distincts deux-à-deux, en lesquels f s'annule. D'après la question 1, on peut trouver $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$$

En particulier, $\forall k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket \quad P(e^{ix_k}) = e^{inx_k} f(x_k) = 0$

La fonction $t \mapsto e^{it}$ est injective sur $[0; 2\pi[$. On en déduit que les $(e^{ix_k})_{0 \leq k \leq 2n}$ sont $2n+1$ racines de P , distinctes deux-à-deux. Comme $\deg P \leq 2n$, c'est que P est le polynôme nul. Par suite,

Si $f \in T_n$ s'annule au moins $2n+1$ fois dans $[0; 2\pi[$, alors f est la fonction nulle.

On rappelle que si $x, y \in \mathbb{R}$ et $e^{iy} = e^{iy}$, alors $e^{i(x-y)} = 1$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$. Ceci assure l'injectivité de $t \mapsto e^{it}$ sur n'importe quel intervalle de longueur 2π .

3 Soit $f \in T_n$. Les fonctions sinus et cosinus sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . De plus, il est facile de vérifier par récurrence que toutes les dérivées de f sont 2π -périodiques.

En effet, en notant τ l'application $t \mapsto t + 2\pi$, on a $f = f \circ \tau$ parce que f est 2π -périodique. Comme f et τ sont dérivables sur \mathbb{R} , on peut écrire $f' = \tau' \times f' \circ \tau = f' \circ \tau$. Donc f' est 2π -périodique. Etc, la récurrence est triviale.

Si $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0; 2\pi]$; donc elle est bornée sur cet intervalle et atteint ses bornes. En particulier, il existe $a \in [0; 2\pi]$ tel que

$$\forall x \in [0; 2\pi] \quad |f^{(p)}(x)| \leq |f^{(p)}(a)|$$

Mais elle est 2π -périodique donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f^{(p)}(x)| = \left| f^{(p)}\left(x - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi}\right]\right) \right| \leq |f^{(p)}(a)|$$

Ce qui prouve que $f^{(p)}$ est bornée sur \mathbb{R} et que $\|f^{(p)}\| \leq |f^{(p)}(a)|$. Mais par définition de $\|f^{(p)}\|$, on a aussi $|f^{(p)}(a)| \leq \|f^{(p)}\|$. Ainsi,

Toutes les dérivées de f sont bornées et si $p \in \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f^{(p)}(a)| = \|f^{(p)}\|$.

4.a Il est clair, d'après la définition, que T_n est un \mathbb{R} -espace vectoriel : plus précisément, c'est le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par

$$\{x \mapsto \cos kx \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\} \cup \{x \mapsto \sin kx \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

Il vient

$$S \in T_n$$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \quad S'(x) = \|f'\| \cos nx - f'(x) \quad S''(x) = -n\|f'\| \sin nx - f''(x)$

En particulier, $S'(0) = \|f'\| - f'(0) = 0 \quad S''(0) = -f''(0)$

Comme $f'(0) = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$, on voit que f' admet en 0 un extremum local. Donc $f''(0) = 0$.

$$S'(0) = S''(0) = 0$$

4.b Posons

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

de sorte que

$$\forall k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket \quad x_k \in]0; 2\pi[$$

et

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \sin nx_k = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

Alors $\forall k \in \mathbb{Z} \quad S(x_k) = (-1)^k \frac{\|f'\|}{n} - f(x_k) = \frac{(-1)^k}{n} (\|f'\| - (-1)^k n f(x_k))$

On rappelle que

$$\|f'\| > n \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq 1$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \|f'\| - (-1)^k n f(x) > 0$$

et

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad S(x_{k-1})S(x_k) < 0$$

Comme S est continue sur \mathbb{R} , le théorème des valeurs intermédiaires assure que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, il existe $y_k \in]x_{k-1}; x_k[$ tel que $S(y_k) = 0$.

De plus, les $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont deux-à-deux distincts parce qu'ils forment une suite strictement croissante : en effet,

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad x_{k-1} < y_k < x_k < y_{k+1} < x_{k+1}$$

On a donc déjà trouvé au moins $2n - 1$ zéros de S dans $]0; 2\pi[$: il s'agit de y_1, \dots, y_{2n-1} , qui sont tous dans $]x_0; x_{2n-1}[$. Il nous en manque un. On sait par exemple que

$$-\frac{\pi}{2n} = x_{-1} < y_0 < x_0 = \frac{\pi}{2n}$$

- Si $y_0 \geq 0$, on a gagné : S s'annule au moins $2n$ fois dans $[0; 2\pi[$, aux points $(y_k)_{0 \leq k \leq 2n-1}$.
- Sinon, c'est que

$$-\frac{\pi}{2n} < y_0 < 0 \quad \text{donc} \quad 2\pi - \frac{\pi}{2n} = x_{2n-1} < 2\pi + y_0 < 2\pi$$

Comme S est 2π -périodique, elle s'annule aussi en $y_0 + 2\pi \in [0; 2\pi[$. Elle s'annule donc au moins $2n$ fois dans $[0; 2\pi[$, aux points $(y_k)_{1 \leq k \leq 2n-1}$ et en $y_0 + 2\pi$.

S s'annule au moins $2n$ fois dans $[0; 2\pi[$.

4.c À l'aide du théorème de Rolle, on obtient immédiatement que S' s'annule au moins $2n - 1$ fois dans $]0; 2\pi[$. Mais comme on a vu que $S'(0) = S'(2\pi) = 0$,

S' s'annule au moins $2n + 1$ fois dans $[0; 2\pi[$.

4.d Le même argument marche encore : d'après le théorème de Rolle, S'' s'annule au moins $2n$ fois dans $]0; 2\pi[$. Mais on a vu que $S''(0) = 0$ donc

S'' s'annule au moins $2n + 1$ fois dans $[0; 2\pi[$.

4.e Comme $S'' \in T_n$ et s'annule au moins $2n + 1$ fois dans $[0; 2\pi[$, la question 2 assure que S'' est la fonction nulle sur \mathbb{R} . Donc S' est une fonction constante ; comme $S'(0) = 0$, c'est que S' est la fonction nulle sur \mathbb{R} . Par suite,

S est constante sur \mathbb{R} .

Mais on a déjà observé, par exemple, que $S(x_0) > 0$ et $S(x_1) < 0$. C'est une contradiction.

(\mathcal{P}) est fausse.

5 Soit $f \in T_n$. Si $\|f\| = 0$, alors f est la fonction nulle donc f' aussi et l'on a

$$\|f'\| = 0 \leq n \times 0 = n\|f\|$$

Supposons donc que $\|f\| > 0$. On sait (question 3) qu'il existe a et b dans \mathbb{R} tels que

$$|f(a)| = \|f\| \quad |f'(b)| = \|f'\|$$

On considère alors la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{f(x+b)}{\varepsilon \|f\|} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \text{signe}(f'(b))$$

Alors g est aussi dans T_n : si $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\text{alors } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{a_0}{\varepsilon \|f\|} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k \cos kb + b_k \sin kb}{\varepsilon \|f\|} \cos kx + \frac{-a_k \sin kb + b_k \cos kb}{\varepsilon \|f\|} \sin kx \right)$$

$$\text{De plus, } \forall x \in \mathbb{R} \quad |g(x)| = \frac{|f(x+b)|}{\|f\|} \leq 1 \quad \text{et} \quad |g(a-b)| = \frac{|f(a)|}{\|f\|} = 1$$

donc $\|g\| = 1$. Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{f'(x+b)}{\|f\|}$$

$$\text{et} \quad g'(0) = \frac{|f'(b)|}{\|f\|} = \frac{\|f'\|}{\|f\|} = \|g'\|$$

Autrement dit : $g \in T_n$, $\|g\| = 1$ et $g'(0) = \|g'\|$. Comme (\mathcal{P}) est fautive, c'est que $\|g'\| \leq n$. Donc $\|f'\| \leq n\|f\|$.

$$\boxed{\forall f \in T_n \quad \|f'\| \leq n\|f\|}$$