

Quatrième Devoir Surveillé

Le 12 Avril 2014

Ce devoir est composé de deux problèmes indépendants, de difficultés équivalentes. Vous pouvez utiliser le résultat d'une question, même si vous n'avez pas réussi à le prouver. Bon courage.

Premier problème (13 points)										
Question	1.a	1.b	1.c	1.d	1.e	1.f	2	3	4	5
Points	0.5	1	0.5	2	2	1	1	2	1.5	1.5

Deuxième problème (13 points)									
Question	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5
Points	1	1	1.5	1.5	2	1	1	2	2

Premier problème : Polynômes de Bernoulli

Le but de ce problème est de définir les polynômes de Bernoulli, et d'étudier quelques une de leurs propriétés. Dans tout le problème, on identifie un polynôme à coefficients dans \mathbb{C} avec sa fonction polynomiale associée.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note

$$f_\alpha : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{te^{t\alpha}}{e^t - 1}$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé.

- (a) Montrer que f_α est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est encore notée f_α .
- (b) Montrer que $\frac{1}{f_\alpha}$ est définie sur \mathbb{R} et a un DL $_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Montrer que f_α a un DL $_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc une unique suite $(B_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_\alpha(t) = \sum_{k=0}^n \frac{B_k(\alpha)}{k!} t^k + o(t^n)$$

Calculer $B_0(\alpha)$.

(d) En considérant la fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t} f_\alpha(t)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k B_k(\alpha) = (n+1)\alpha^n$$

et donner $B_n(\alpha)$ en fonction de $B_0(\alpha), \dots, B_{n-1}(\alpha)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Calculer $B_1(\alpha), B_2(\alpha), B_3(\alpha), B_4(\alpha), B_5(\alpha)$.

(f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n(\alpha + 1) - B_n(\alpha) = n\alpha^{n-1}$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\alpha \mapsto B_n(\alpha)$ est une fonction polynomiale de degré n à coefficients dans \mathbb{Q} . Le polynôme B_n est appelé le n -ème polynôme de Bernoulli.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{B'_{n+1}}{n+1} = X^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k \frac{B'_{k+1}}{k+1}$

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad B'_{n+1} = (n+1)B_n$

Remarque : Vous pouvez utiliser cette formule pour vérifier que vos calculs à la question 1.e sont corrects.

5. Une application : Si $m, n \in \mathbb{N}^*$, utiliser les résultats précédents pour obtenir expression simplifiée de $\sum_{k=0}^m k^n$ en fonction des polynômes de Bernoulli. En particulier, calculer $\sum_{k=0}^m k^4$.

Deuxième problème : L'inégalité de Bernstein

Dans tout le problème, n est un entier non nul fixé.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n si, et seulement si, il existe des réels a_0, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

L'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur à n est noté T_n .

Si f est une application définie sur \mathbb{R} , bornée, on notera $\|f\| = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

1. Soit $f \in T_n$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$$

2. Soit $f \in T_n$. On suppose que f s'annule (au moins) $2n+1$ fois dans $[0; 2\pi[$. Montrer que f est la fonction nulle.

3. Soit $f \in T_n$. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ et que toutes ses dérivées sont bornées. Si $p \in \mathbb{N}$, prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f^{(p)}(a)| = \|f^{(p)}\|$.

4. Soit $f \in T_n$. On suppose que la propriété (\mathcal{P}) ci-dessous est vraie :

$$\|f\| = 1 \quad \|f'\| = f'(0) \quad \text{et} \quad \|f'\| > n \quad (\mathcal{P})$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \frac{\|f'\|}{n} \sin nx - f(x)$

(a) Prouver que $S \in T_n$, calculer $S'(0)$ et $S''(0)$.

(b) Montrer que S s'annule au moins $2n$ fois dans $[0; 2\pi[$.

Indication : Il y a des points en lesquels le signe de S est facile à voir.

(c) Montrer que S' s'annule au moins $2n + 1$ fois dans $[0; 2\pi[$.

(d) En déduire que S'' s'annule au moins $2n + 1$ fois dans $[0; 2\pi[$.

(e) En déduire que (\mathcal{P}) est fausse.

5. Montrer alors l'**inégalité de Bernstein** :

$$\forall f \in T_n \quad \|f'\| \leq n\|f\|$$

Indication : Si $f \in T_n \setminus \{0\}$, construire à l'aide de f une fonction $g \in T_n$ telle que $\|g\| = 1$ et $\|g'\| = \|f'\|$.