

Sixième Devoir à la Maison

Exercice : Manipulations de matrices

Soit s l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ dans la base canonique,

qui est notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que s est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Soient $e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Déterminer la matrice S' de s dans cette base.
 - (c) Calculer la matrice de passage P de la base canonique vers \mathcal{B}' et la matrice de passage Q de \mathcal{B}' vers la base canonique.
 - (d) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode pour calculer S^n (les calculs ne sont pas demandés, donner uniquement la méthode).
 - (e) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $M_3(\mathbb{R})$?
 - (f) Montrer que $S^2 \in \text{Vect}(I_3, S)$.
 - (g) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$. Donner une relation de récurrence pour les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 .
 - (h) Calculer a_n et b_n pour tout entier n . On pourra étudier les deux suites $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On essaie de calculer S^n d'une autre manière. On note $B = S - 2I_3$.
 - (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$. Attention à bien justifier pourquoi votre calcul est possible.
 - (c) Comparer avec le résultat de la question 2.h.
4. L'expression de S^n obtenue aux questions 2 et 3 est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Problème : Endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui préservent $GL_n(\mathbb{C})$

Soit f un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$, tel que $GL_n(\mathbb{C})$ est stable par f . Cela signifie que

$$\forall P \in GL_n(\mathbb{C}) \quad f(P) \in GL_n(\mathbb{C})$$

L'objectif de ce problème est de montrer que f préserve le rang :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \text{rg } f(A) = \text{rg } A$$

Si u est un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie E , on note χ_u la fonction définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \text{id}_E)$$

1. Montrer que χ_u est une fonction polynomiale de degré n et donner son coefficient de degré n .
2. Soient P et Q des matrices inversibles. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est stable par $A \mapsto PAQ$. Voyez-vous d'autres endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui laissent stable $GL_n(\mathbb{C})$?
3. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que χ_B admet au moins r racines z_1, \dots, z_r , distinctes deux-à-deux, non nulles.
 - (a) Montrer qu'il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}^n$, non nuls, tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad Bu_i = z_i u_i$$
 - (b) Montrer que la famille (u_1, \dots, u_r) est libre.
 - (c) On complète cette famille en une base (u_1, \dots, u_n) de \mathbb{C}^n . À quoi ressemble la matrice de B dans cette base ?
 - (d) En déduire que $\text{rg}(B) \geq r$.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, de rang $r \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.
 - (a) Montrer qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A = P \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$.
 - (b) On note $M = PQ$. Montrer que $M - \lambda A$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
 - (c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Exprimer $\det(f(M) - \lambda f(A))$ en fonction de $\det f(M)$, λ et $\chi_{f(M)^{-1}f(A)}$. Montrer (soigneusement) que la fonction $\lambda \mapsto \det(f(M) - \lambda f(A))$ est polynomiale, de degré inférieur à n .
 - (d) Montrer que cette fonction est constante. En déduire $\chi_{f(M)^{-1}f(A)}$.
 - (e) Montrer que $f(A)$ n'est pas inversible.

(f) Soient z_1, \dots, z_r des nombres complexes distincts, non nuls. On note

$$B = \begin{bmatrix} z_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & z_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = P \begin{bmatrix} 0 & B \\ I_{n-r} & 0 \end{bmatrix} Q$$

Montrer que $N - \lambda A$ n'est pas inversible pour exactement r valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ et donner ces valeurs.

(g) En imitant la stratégie des questions **4.c-e**, montrer que $\text{rg}(f(A)) \geq \text{rg}A$.

5. Conclure : montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\text{rg} f(A) = \text{rg}A$.