

Huitième devoir à la maison — Corrigé

Problème 1

1 Soient u et v dans \mathbb{R} . Les matrices suivantes ont le même noyau :

$$A = \begin{bmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{u}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & v & -uv \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + vL_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & v \\ 0 & -1 & u \end{bmatrix}$$

D'où
$$\text{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = vx_3 \text{ et } x_2 = ux_3 \right\} = \text{Vect} \begin{bmatrix} v \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

D'après le théorème du rang, $\text{Im} A$ est de dimension 2. Mais les deux premières colonnes de A sont clairement libres, donc

$$\text{Im} A = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Enfin, comme A est la matrice de f relativement à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 + uX + v)} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{Im } f = \text{Vect}(X^2 - v, 2X + u)}$$

2 Soit $w \in \mathbb{R}$. Les matrices suivantes ont le même rang :

$$\begin{bmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_4}} \begin{bmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3w \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow -3C_2 + wC_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3w \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 + (1+w)L_3} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3w-1 & -3w(1+w) \\ 0 & 2 & -1 & -3w \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 \leftarrow -C_1/3 \\ C_3 \leftarrow 2C_3 + C_2 \\ C_4 \leftarrow -2C_4 + 3wC_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3w-1 & -3w(1+w) \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - (3w-1)L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3(w-1)^2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2/2 \\ C_4 \leftarrow -C_4 + 3C_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3(w-1)^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le rang de cette dernière matrice se voit immédiatement et on en déduit que

$$\text{rg } g = \text{rg } B = \begin{cases} 3 & \text{si } w = 1 \\ 4 & \text{si } w \neq 1 \end{cases}$$

g n'est pas bijective si, et seulement si, $w = 1$.

Supposons maintenant que $w = 1$. Alors B est de rang 3 et son noyau est de dimension 1. Les opérations suivantes ne changent pas le noyau :

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1/3 \\ L_2 \leftarrow L_2/2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ainsi,
$$\text{Ker } B = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid x_1 = x_4 \text{ et } x_2 = x_3 = 3x_4 \right\} = \text{Vect} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme B représente f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$, il vient

$$\boxed{\text{Ker } g = \text{Vect}(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) = \text{Vect}((X + 1)^3)}$$

3.a La linéarité de φ est triviale, parce que l'application $P \mapsto P'$ est linéaire, et le produit est distributif sur l'addition dans $\mathbb{R}[X]$.

Vérifions maintenant que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul. On note $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ son degré. On a alors

$$\deg P' = p - 1 \quad \deg Q' = 1 \quad \deg(2P'Q) = p + 1 \quad \deg(nPQ') = p + 1$$

donc

$$\deg \varphi(P) \leq p + 1$$

Ainsi, si $p \leq n - 1$, il est clair que $\varphi(P)$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Si $p = n$, alors

- le coefficient de degré $n + 1$ de $2P'Q$ est $2nP_nQ_2$;
- le coefficient de degré $n + 1$ de nPQ' est nP_n2Q_2 .

Le coefficient de degré $n + 1$ de $\varphi(P)$ est donc nul : $\varphi(P)$ est de degré inférieur à n .

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3.b Soient u et v deux réels. On suppose que $n = 2$ et que $Q = X^2 + uX + v$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Avec ces notations,

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad \varphi(P) = 2(X^2 + uX + v)P' - 2(2X + u)P$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= -2(2X + u) = -4X - 2u \\ \varphi(X) &= 2(X^2 + uX + v) - 2X(2X + u) = -2X^2 + 2v \\ \varphi(X^2) &= 4X(X^2 + uX + v) - 2X^2(2X + u) = 2uX^2 + 4vX \end{aligned}$$

et

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} -2u & 2v & 0 \\ -4 & 0 & 4v \\ 0 & -2 & 2u \end{bmatrix}}$$

On reconnaît là $2A$, où A est la matrice étudiée à la question 1. Donc $\varphi = 2f$, ce qui permet d'obtenir immédiatement

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 + uX + v) = \text{Vect } Q$$

3.c Soit $w \in \mathbb{R}$. On suppose ici que $n = 3$ et $Q = X^2 + 2X + w$. La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est notée $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Avec ces notations,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad \varphi(P) = 2(X^2 + 2X + w)P' - 6(X + 1)P$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= -6X - 6 \\ \varphi(X) &= 2(X^2 + 2X + w) - 6(X + 1)X = -4X^2 - 2X + 2w \\ \varphi(X^2) &= 4(X^2 + 2X + w)X - 6(X + 1)X^2 = -2X^3 + 2X^2 + 4wX \\ \varphi(X^3) &= 6(X^2 + 2X + w)X^2 - 6(X + 1)X^3 = 6X^3 + 6wX^2 \end{aligned}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \begin{bmatrix} -6 & 2w & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 4w & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 6w \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

On reconnaît là $3B$, où B est la matrice étudiée à la question 2. Il s'ensuit que $\varphi = 3g$ et

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } g = \begin{cases} \{0\} & \text{si } w \neq 1 \\ \text{Vect}((X + 1)^3) & \text{si } w = 1 \end{cases}$$

3.d.i Notons $D = \text{pgcd}(Q, Q')$. Si $D \neq 1$, alors il n'est pas constant et il a une racine $z \in \mathbb{C}$ (pas besoin de d'Alembert : D est de degré 1 car Q' est de degré 1). Alors $X - z$ divise D , donc il divise Q et Q' . Autrement dit, z est racine de Q et Q' . C'est impossible, puisque Q n'a pas de racine multiple dans \mathbb{R} .

$$Q \text{ et } Q' \text{ sont premiers entre eux.}$$

On peut aussi procéder d'une autre manière, en utilisant le fait que Q est de degré 2 : il existe a, b et c réels tels que

$$Q = aX^2 + bX + c \quad \text{et} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac \neq 0$$

Alors

$$Q' = 2aX + b$$

Un calcul classique montre que

$$Q = a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{(2aX + b)^2 + 4ac - b^2}{4a}$$

et

$$\frac{4aQ - Q'^2}{4ac - b^2} = 1$$

D'après Bezout, Q et Q' sont premiers entre eux.

Ou encore, comme Q' ne divise pas Q et Q' est irréductible (il est de degré 1), c'est qu'il est premier avec Q .

3.d.ii Soit $P \in \text{Ker } \varphi$, non nul. Alors $2P'Q = nPQ'$. Comme Q et Q' sont premiers entre eux, le théorème de Gauss assure que Q divise nP . Mais $P = \frac{1}{n}nP$ donc

Q divise P.

3.d.iii Supposons $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$. Il existe $P \in \text{Ker } \varphi$, non nul et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q^k | P$ et Q^{k+1} ne divise pas P. Autrement dit, il existe un polynôme $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^k S$ et Q ne divise pas S. On calcule alors

$$0 = \varphi(P) = 2(kQ^{k-1}Q'S + Q^kS')Q - nQ^kSQ' = Q^k(2kQ'S + QS' - nSQ')$$

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre et $Q \neq 0$, il vient

$$2kQ'S + 2QS' - nSQ' = 0 \quad \text{et ensuite} \quad (n - 2k)Q'S = 2QS'$$

Mais Q et Q' sont premiers entre eux donc Q divise $(n - 2k)S$. Comme Q ne divise pas S, cela assure que $n - 2k = 0$.

Si $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$, alors n est pair.

3.d.iv Par contre-apposée, si n est impair, alors $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

Supposons maintenant que n est pair. On note $m = \frac{n}{2}$. L'analyse de la question précédente montre que si $P \in \text{Ker } \varphi$ n'est pas nul, alors il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^m S$. Mais Q est de degré 2 donc Q^m est de degré $2m = n$. Comme $\text{deg } P \leq n$, c'est que P est de degré n et S est de degré 0. Ceci montre

$$\text{Ker } \varphi \subset \text{Vect } Q^{\frac{n}{2}}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que

$$\varphi(Q^{\frac{n}{2}}) = 2 \frac{n}{2} Q^{\frac{n}{2}-1} Q' Q - n Q^{\frac{n}{2}} Q' = 0$$

ce qui prouve l'autre inclusion.

$$\text{Ker } \varphi = \begin{cases} \{0\} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \text{Vect}(Q^{\frac{n}{2}}) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

3.e.i On suppose maintenant que Q a une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, non nul, tel que $Q = \lambda(X - \alpha)^2$; alors $Q' = 2\lambda(X - \alpha)$.

Soit $P \in \text{Ker } \varphi$, non nul. On a

$$2P'Q - nPQ' = 0 \quad \text{donc} \quad 2\lambda(X - \alpha)^2 P' - 2n\lambda(X - \alpha)P = 0$$

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, il vient $(X - \alpha)P' - nP = 0$:

Si $P \in \text{Ker } \varphi$ n'est pas nul, alors α est racine de P.

3.e.ii Soit $P \in \text{Ker } \varphi$, non nul. On sait que α est racine de P et on note $k \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité. Il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)S$ et $S(\alpha) \neq 0$. On sait aussi, d'après la question précédente, que

$$0 = (X - \alpha)P' - nP = (X - \alpha)(k(X - \alpha)^{k-1}S + (X - \alpha)^k S') - n(X - \alpha)^k S$$

$\mathbb{R}[X]$ est intègre donc on peut simplifier par $(X - \alpha)^k$ pour obtenir :

$$kS + (X - \alpha)S' - nS = 0$$

On évalue en α et il vient $(k - n)S(\alpha) = 0$. Comme $S(\alpha) \neq 0$, c'est que $k = n$. Ainsi, $P = (X - \alpha)^n S$. Mais P n'est pas nul et de degré inférieur à n donc S est de degré 0.

$$\text{Ker } \varphi \subset \text{Vect}((X - \alpha)^n)$$

L'inclusion réciproque est triviale à vérifier.

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Vect}((X - \alpha)^n)}$$

3.f On suppose n impair. Le polynôme $X^2 + 1$ est de degré 2 et n'a pas de racine multiple dans \mathbb{R} . L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto (X^2 + 1)P' - nXP = \frac{1}{2}(2(X^2 + 1)P' - n(X^2 + 1)'P) \end{aligned}$$

est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question **3.d.iv**. Il est bijectif d'après le cours.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \exists ! R \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = (X^2 + 1)R' - nXR}$$

Problème 2

I.1 On observe avant toute chose que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme L_i est de degré n (produit de n monômes) et vérifie

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

On se donne des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$. Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on peut évaluer cette relation en a_j pour obtenir :

$$0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$$

Ainsi,

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \lambda_j = 0$$

La famille (L_0, \dots, L_n) est donc libre dans $\mathbb{C}_n[X]$. Comme elle comporte $n + 1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{C}_n[X] = n + 1$, c'est une base de cet espace vectoriel.

$$\boxed{(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].}$$

I.2 Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, il admet une décomposition (unique) dans la base (L_0, \dots, L_n) : il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ dans \mathbb{C} tels que

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$$

Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on évalue cette relation en a_j pour trouver

$$P(a_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$$

Par suite,

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X] \quad P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$$

et les coordonnées de P dans la base (L_0, \dots, L_n) sont $\begin{bmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{bmatrix}$.

En particulier, si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, les coordonnées dans cette base de X^k sont $\begin{bmatrix} a_0^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{bmatrix}$.

La matrice de la famille $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base (L_0, L_1, \dots, L_n) est $\begin{bmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}$.

I.3 Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on décompose L_i dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$L_i = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,i} X^k$$

M^{-1} est la matrice de passage de $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$ vers $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ donc

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \cdots & \alpha_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,0} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}$$

Il faut faire attention au fait que les polynômes $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont au nombre de $n + 1$ et sont comptés à partir de 0. Donc la j -ème colonne de M^{-1} donne les coordonnées de L_{j-1} dans la base canonique (et non pas L_j).

On a $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \alpha_{0,i} = L_i(0) = L_i(a_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ 1 & \text{si } i = 0 \end{cases}$

donc

La première ligne de M^{-1} est $[1 \ 0 \ \cdots \ 0]$.

Si $j \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, la somme des éléments de la j -ème colonne de M^{-1} est

$$c_j = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,j-1} = L_{j-1}(1) = L_{j-1}(a_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } j-1 \neq 1 \\ 1 & \text{si } j-1 = 1 \end{cases}$$

La somme des éléments de chaque colonne de M^{-1} est nulle, sauf la deuxième qui vaut 1.

Enfin, pour trouver la somme des éléments d'une ligne de M^{-1} , on a besoin de la formule

$$\sum_{i=0}^n L_i = 1$$

Cette formule provient simplement de l'étude faite à la question **II.2**, où l'on a vu que tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ se décompose en

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$$

Il suffit de prendre pour P le polynôme constant égal à 1.

On a donc
$$1 = \sum_{i=0}^n L_i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{k,i} X^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n \alpha_{k,i} \right) X^k$$

Si $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on note ℓ_k la somme des coefficients de la k -ème ligne de M^{-1} . On a donc

$$1 = \sum_{k=0}^n \ell_{k+1} X^k = \sum_{k=1}^{n+1} \ell_k X^{k-1}$$

Mais deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \quad \ell_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k-1 \neq 0 \\ 1 & \text{si } k-1 = 0 \end{cases}$$

La somme des coefficients de chaque ligne de M^{-1} est nulle, sauf la première qui vaut 1.

II.1 On calcule les images des vecteurs de base par ces applications. Si $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$,

$$t_a(e_j) = (X+a)^j = \sum_{i=0}^j C_j^i a^{j-i} X^i$$

et
$$d(e_j) = d(X^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ jX^{j-1} & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

D'où
$$T_a = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 a & \dots & C_k^0 a^k \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_k^1 a^{k-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_k^k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & k \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

II.2 Il saute aux yeux que D est de rang k donc d est également de rang k . D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } d = k+1 - k = 1$. Et on sait que le polynôme constant 1 se trouve dans $\text{Ker } d$.

$\text{Ker } d = \text{Vect}(1)$ est l'ensemble des polynômes constants.

De même, il saute aux yeux que $T_a - I_{k+1}$ est de rang k , qui est donc aussi le rang de $t_a - \text{id}$. D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(t_a - \text{id}) = 1$. Enfin, on a $t_a(1) = 1$ donc le polynôme constant 1 se trouve dans $\text{Ker}(t_a - \text{id})$.

$\text{Ker}(t_a - \text{id}) = \text{Vect}(1)$ est l'ensemble des polynômes constants.

II.3 On commence par remarque que tous les $\mathbb{R}_p[X]$, pour $p \in \llbracket 0; k \rrbracket$ sont stables par d , puisque la dérivation abaisse le degré. Trivialement, $\{0\}$ est aussi stable par d .

Soit F un sous-espace de E, stable par d . Évidemment, on écarte le cas trivial où $F = \{0\}$. En suivant l'indication de l'énoncé, on se donne $P \in F$, de degré maximal noté p . Ceci signifie que tout élément de F est de degré inférieur à p , donc $F \subset \mathbb{R}_p[X]$.

Les polynômes $P, d(P), d^2(P), \dots, d^p(P)$ se trouvent dans F, puisque ce dernier est stable par d . La dérivation fait baisser le degré d'une unité donc $d^j(P)$ est de degré $p - j$ pour $j \in \llbracket 0; p \rrbracket$.

La famille $(P, d(P), \dots, d^p(P))$ est alors libre car formée de polynômes non nuls de degrés étagés. Elle engendre donc un sous-espace de dimension $p + 1$ de $\mathbb{R}_p[X]$, qui est lui-même de dimension $p + 1$. Donc

$$\text{Vect}(P, d(P), \dots, d^p(P)) = \mathbb{R}_p[X] \subset F$$

Conclusion : Les sous-espaces de E , stables par d , sont $\{0\}, \mathbb{R}_0[X], \dots, \mathbb{R}_k[X]$.

II.4 Pour les mêmes raisons que précédemment, le système $(P, d(P)/1!, \dots, d^k(P)/k!)$ est libre : il s'agit d'une famille, étagée en degrés, de polynômes non nuls. Comme elle comporte $k + 1$ vecteurs de E , qui est de dimension $k + 1$, c'en est une base.

$$\mathcal{B}_1 = \left(P, \frac{d(P)}{1!}, \dots, \frac{d^k(P)}{k!} \right) \text{ est une base de } E.$$

Pour trouver la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_1 , il suffit de décomposer les vecteurs de \mathcal{B}_1 dans la base canonique. On rappelle la formule

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad d^j(X^i) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!} X^{i-j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Par suite, $\forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket$

$$\begin{aligned} \frac{d^j(P)}{j!} &= \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^k p_i d^j(X^i) \\ &= \sum_{i=j}^k \frac{i!}{j!(i-j)!} p_i X^{i-j} = \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(i+j)!}{j!i!} p_{i+j} X^i \\ \frac{d^j(P)}{j!} &= \sum_{i=0}^{k-j} C_{i+j}^j p_{i+j} X^i \end{aligned}$$

L'avant-dernière étape résulte d'un changement d'indice $i \leftarrow i - j$. Ces calculs fournissent la matrice de passage recherchée :

$$R = \begin{bmatrix} C_0^0 p_0 & \cdots & C_{k-1}^{k-1} p_{k-1} & C_k^k p_k \\ C_1^0 p_1 & \cdots & C_k^{k-1} p_k & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ C_k^0 p_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

II.5 On peut s'en sortir avec la formule de Taylor. On rappelle que

$$\forall Q \in E \quad \forall x, h \in \mathbb{C} \quad Q(x+h) = \sum_{j=0}^k \frac{Q^{(j)}(x)}{j!} h^j$$

Fixons Q et h ; la relation précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{C}$; et puisqu'on peut assimiler fonction polynomiale sur \mathbb{C} et polynôme formel à coefficients dans \mathbb{C} , il s'ensuit que

$$\forall Q \in E \quad \forall h \in \mathbb{C} \quad Q(X+h) = \sum_{j=0}^k \frac{Q^{(j)}}{j!} h^j$$

En particulier, $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$

$$P(X+ia) = \sum_{j=0}^k \frac{P^{(j)}}{j!} (ia)^j = \sum_{j=0}^k (ia)^j \frac{d^j(P)}{j!}$$

Les coordonnées de $P(X + ia)$ dans la base \mathcal{B} sont $\begin{bmatrix} 1 \\ ia \\ \vdots \\ (ia)^k \end{bmatrix}$.

D'où l'on déduit

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & ka \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^k & \cdots & (ka)^k \end{bmatrix}$$

On reconnaît la transposée de la matrice de passage trouvée à la question **I.2**, avec $a_i = ia$ pour tout i . Une matrice de passage est inversible donc U est inversible. Mais U est la matrice de la famille S dans \mathcal{B}_1 . Par suite,

S est une base de E .

II.6 R est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_1 et U est la matrice de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}_2 . Par suite,

La matrice de passage Q de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_2 est RU .

II.7 On procède de la même manière qu'à la question **II.3**. On commence par observer que tous les $\mathbb{R}_p[X]$, pour $p \leq k$, sont stables par t_a . Il s'agit de montrer que ce sont les seuls, avec bien sûr le sous-espace trivial $\{0\}$.

Soit F un sous-espace de E , stable par t_a . On suppose évidemment $F \neq \{0\}$, de sorte qu'on puisse prendre, parmi les éléments de F , un polynôme P de degré maximal qu'on note p . Tous les éléments de F sont donc de degré inférieur à p donc $F \subset \mathbb{R}_p[X]$ et $\dim F \leq p + 1$.

Puisque F est stable par t_a , les polynômes $P, P(X+a), \dots, P(X+pa)$ sont dans F . Mais ils forment une famille libre de F d'après la question **II.5** et F est de dimension au moins $p + 1$.

Au final, F a la même dimension que $\mathbb{R}_p[X]$, dans lequel il est inclus. Donc $F = \mathbb{R}_p[X]$.

Les sous-espace de E , stables par t_a , sont $\{0\}, \mathbb{R}_0[X], \dots, \mathbb{R}_k[X]$.