

## Trigonalisation simultanée d'endomorphismes nilpotents

### Partie 1 : Généralités sur les endomorphismes nilpotents

**1.1** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , nilpotent, d'indice  $d$ . Par définition,

$$d = \text{Min} \{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0\}$$

donc  $u^d = 0$  et  $u^{d-1} \neq 0$ . En particulier, il existe  $x \in E$  tel que  $u^{d-1}(x) \neq 0$ . Montrons que  $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$  est libre : soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ , tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

On suppose que  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \neq 0$  et on note  $m \leq d-1$  le rang du premier  $\lambda$  qui n'est pas nul :

$$m = \text{Min} \{k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$$

Alors 
$$\sum_{k=m}^{d-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

On compose par  $u^{d-1-m}$  pour obtenir :

$$\sum_{k=m}^{d-1} \lambda_k u^{k+d-1-m}(x) = 0$$

Mais si  $k > m$ , on a  $k+d-1-m > d-1$  donc  $u^{k+d-1-m} = 0$ . Par suite, tous les termes de cette somme sont nuls sauf le premier et il vient  $\lambda_m u^{d-1}(x) = 0$ .

Mais  $u^{d-1}(x) \neq 0$  donc c'est que  $\lambda_m = 0$ . Ce qui fournit une contradiction.

Il existe  $x \in E$  tel que  $(x, \dots, u^{d-1}(x))$  est libre.

On en déduit que  $d = \dim \text{Vect}(x, \dots, u^{d-1}(x)) \leq \dim E = n$

L'indice de nilpotence de  $u$  est inférieur à la dimension de  $E$ .

**1.2** Une récurrence immédiate montre que pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $u^k(V_n) \subset V_{n-k}$ . En particulier,  $u^n(E) = \{0\}$  donc

$u$  est nilpotent

À présent, soit  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$  une matrice triangulaire supérieure. On note

$u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui a pour matrice  $A$  dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ . On sait que les colonnes de  $A$  sont les vecteurs  $u(e_1), \dots, u(e_n)$ . Donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{k,i} e_i & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

Autrement dit,  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(V_k) \subset V_{k-1}$

Ceci implique que  $u$  est nilpotent. On a donc  $u^n = 0$ . Mais  $A^n$  est la matrice de  $u^n$  dans la base canonique. Donc  $A^n = 0$ .

Une matrice carrée triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

**1.3** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $x \in \text{Ker } u^m$ . Alors

$$u^{m+1}(x) = u(u^m(x)) = u(0) = 0$$

donc  $x \in \text{Ker } u^{m+1}$ , ce qui montre que  $\text{Ker } u^m \subset \text{Ker } u^{m+1}$ . Alors

$$\{0\} \subset \text{Ker } u \subset \dots \subset \text{Ker } u^{d-1} \subset \text{Ker } u^d = E$$

Il reste à montrer que toutes ces inclusions sont strictes. On sait que  $\text{Ker } u^{d+1} = E$  puisqu'il contient  $\text{Ker } u^d$ , qui est égal à  $E$ . Par suite, l'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}\}$$

n'est pas vide. Si  $p \in A$ , montrons que  $p+1 \in A$ . On sait que

$$\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1} \subset \text{Ker } u^{p+2}$$

Maintenant, soit  $x \in \text{Ker } u^{p+2}$ . On a

$$0 = u^{p+2}(x) = u^{p+1}(u(x))$$

donc  $u(x) \in \text{Ker } u^{p+1}$ . Mais cet ensemble est égal à  $\text{Ker } u^p$ , donc

$$0 = u^p(u(x)) = u^{p+1}(x)$$

ce qui montre que  $x \in \text{Ker } u^{p+1}$ . On a bien  $\text{Ker } u^{p+1} = \text{Ker } u^{p+2}$  :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \in A \implies p+1 \in A$$

On note  $p_0$  le plus petit élément de  $A$ . Si  $p_0 < d$ , on a

$$\text{Ker } u^{p_0} = \text{Ker } u^{p_0+1} = \dots = \text{Ker } u^d = E$$

donc  $u^{p_0} = 0$ . Ceci contredit le fait que  $d$  est l'indice de nilpotence de  $u$ . Donc  $p_0 \geq d$  et

$$\forall k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket \quad \text{Ker } u^k \subsetneq \text{Ker } u^{k+1}$$

ou encore

$$\text{Ker } u^0 \subsetneq \text{Ker } u^1 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } u^d = E$$

L'existence d'une base qui a les propriétés voulues peut se faire par récurrence sur l'indice de nilpotence de l'endomorphisme. On définit, pour tout entier  $d$ , la propriété  $\mathcal{P}(d)$  : « Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, notée  $n \neq 0$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , nilpotent, d'indice au plus  $d$ . Alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket \quad u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) \quad \text{et} \quad u(e_1) = 0 \quad \gg$$

- **$\mathcal{P}(1)$  est vraie** : Si  $E$  est de dimension finie non nulle et  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent d'indice 1, cela veut dire que  $u$  est nul. Alors n'importe quelle base de  $E$  convient.
- **$\mathcal{P}(d) \implies \mathcal{P}(d+1)$**  : Soit  $d$  un entier non nul, tel que  $\mathcal{P}(d)$  est vraie. On se donne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , de dimension finie notée  $n \neq 0$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , nilpotent d'indice  $d$ . On sait alors que

$$\text{Ker } u^d \subset \text{Ker } u^{d+1} = E$$

On remarque que  $\text{Ker } u^d$  est stable par  $u$ , puisque

$$\forall x \in \text{Ker } u^d \quad u^d(u(x)) = u^{d+1}(x) = 0$$

On peut donc définir l'application

$$\tilde{u} : \begin{array}{l} \text{Ker } u^d \longrightarrow \text{Ker } u^d \\ x \longmapsto u(x) \end{array}$$

et  $\tilde{u}$  est un endomorphisme de  $\text{Ker } u^d$ . De plus,  $\tilde{u}$  est nilpotent :

$$\forall x \in \text{Ker } u^d \quad \tilde{u}^d(x) = u^d(x) = 0$$

Et, comme  $\text{Ker } u^{d-1} \subsetneq \text{Ker } u^d$ , il existe  $x \in \text{Ker } u^d$  tel que  $u^{d-1}(x) \neq 0$  donc  $\tilde{u}^{d-1}(x) \neq 0$ . Ceci montre que  $\tilde{u}$  est d'indice exactement  $d$ .

D'après  $\mathcal{P}(d)$ , il existe une base  $(e_1, \dots, e_m)$  de  $\text{Ker } u^d$  telle que,

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)) = \tilde{u}(\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$$

et  $u(e_1) = \tilde{u}(e_1) = 0$

Comme  $\text{Ker } u^d \subsetneq \text{Ker } u^{d+1} = E$ , on complète  $(e_1, \dots, e_m)$  en une base  $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . Et on voit que

$$\forall k \in \llbracket m+1; n \rrbracket \quad u^d(u(e_k)) = u^{d+1}(e_k) = 0 \quad \text{d'où} \quad u(e_k) \in \text{Ker } u^d$$

Par conséquent,

$$\forall k \in \llbracket m+1; n \rrbracket \quad u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)) \subset \text{Ker } u^d = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$$

Ceci achève de démontrer  $\mathcal{P}(d+1)$ .

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(d)$  est vraie pour tout entier  $d$ , ce qui répond à la question.

Une fois qu'on a construit une base  $\mathcal{B}$  qui vérifie ces propriétés, on voit que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure stricte.

**1.4** Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{K}^2$  et  $u, v$  deux endomorphismes de  $\mathbb{K}^2$ , tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons A et B ces deux matrices. Supposons qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{K}^2$  dans laquelle les matrices de  $u$  et  $v$  sont triangulaires supérieures strictes. Par exemple,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Le produit de ces deux matrices est nul donc  $uv = 0$ . Mais  $AB \neq 0$  donc  $uv \neq 0$ . C'est une contradiction.

Il n'existe pas de base dans laquelle les matrices de  $u$  et  $v$  sont toutes deux triangulaires supérieures strictes.

**1.5** Il est facile de montrer, en utilisant la formule de multiplication des matrices par blocs et une récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $M^n$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} A^n & \star \\ 0 & D^n \end{bmatrix}$$

Si M est nilpotente, d'indice  $d$ , on voit donc  $A^d = 0$  et  $D^d = 0$  donc ces matrices sont toutes deux nilpotentes.

Si A et D sont nilpotentes, on prend un entier  $n$  tel que  $A^n = 0$  et  $D^n = 0$  (par exemple le maximum des indices de nilpotence de A et D). Alors  $M^n$  est de la forme

$$M^n = \begin{bmatrix} 0 & \star \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elle est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente d'après la question 1.2. Donc M est nilpotente.

M est nilpotente si, et seulement si, A et D sont nilpotente.

**1.6** Soit  $n$  un entier non nul. On note

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1-n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = [1 \cdots 1] \in M_{1,n}(\mathbb{K})$$

On remarque que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ 1-n & \cdots & 1-n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad BA = 0$$

donc  $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = 0$

La matrice AB est nilpotente (d'indice 2) et n'a aucun coefficient nul.

**Partie 2 : Le théorème d'Engel**

**2.1** Soient E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il est trivial que  $\text{ad}_u$  est linéaire, d'après le fait que  $\mathcal{L}(E)$  est un anneau et parce que  $u$  est linéaire.

Par une récurrence immédiate, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{ad}_u^n(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k u^k f u^{n-k}$$

Supposons maintenant que  $u$  est nilpotent d'indice  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{ad}_u^{2n-1}(f) &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k C_{2n-1}^k u^k f u^{2n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n-1}^k u^k f u^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} (-1)^k C_{2n-1}^k u^k f u^{2n-1-k} \end{aligned}$$

Mais  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad 2n-1-k \in \llbracket n; 2n-1 \rrbracket$

d'où  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad u^{2n-1-k} = 0$

De plus,  $\forall k \in \llbracket n; 2n-1 \rrbracket \quad u^k = 0$

Ceci montre que  $\text{ad}_u^{2n-1}(f) = 0$  pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $u$  est nilpotent,  $\text{ad}_u$  est nilpotent.

**2.2** Soient E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{N}$  un sous-espace de  $\mathcal{L}(E)$ , de dimension 1, stable par  $[\ , \ ]$ , dont tous les éléments sont nilpotents.

Comme  $\mathcal{N}$  est de dimension 1, il existe  $u_0 \in \mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{N} = \text{Vect}(u_0)$ . Donc

$$\bigcap_{u \in \mathcal{N}} \text{Ker } u = \text{Ker } u_0$$

Mais  $u_0$  est nilpotent donc il n'est pas bijectif. Par suite,  $\text{Ker } u_0 \neq \{0\}$ .

$\mathcal{P}(1)$  est vraie.

**2.3** On sait que  $\mathcal{N}$  est de dimension au moins 2. Donc il existe  $u_0 \in \mathcal{N}$  non nul. On note  $\mathcal{F}_0 = \text{Vect}(u_0)$ . Alors  $\mathcal{F}_0$  est un sous-espace de  $\mathcal{N}$ , strict car de dimension 1. De plus, il est stable par  $[\ , \ ]$  : en effet, si  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{F}_0$ , ils sont proportionnels à  $u_0$  donc ils commutent et l'on a  $[u, v] = 0 \in \mathcal{F}$ . Ceci montre que  $r \geq 1$ .

De plus, si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace strict de  $\mathcal{N}$ , sa dimension est inférieure à  $d - 1$ . Donc  $r \leq d - 1$ .

$0 < r < d$

**2.4** Soit  $u \in \mathcal{N}_1$ . On sait que  $\mathcal{N}_1$  est stable par  $[\cdot, \cdot]$  donc  $\text{ad}_u(f) \in \mathcal{N}_1$  pour tout  $f \in \mathcal{N}_1$ . En particulier,

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \text{ad}_u(e_i) \in \mathcal{N}_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$

Ceci montre que  $\text{ad}_u(e_i)$  n'a pas de composantes suivant  $e_{r+1}, \dots, e_d$  si  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ .

La matrice de  $\text{ad}_u$  dans la base  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d)$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in M_r(\mathbb{K}) \quad B \in M_{r, d-r}(\mathbb{K}) \quad D \in M_{d-r}(\mathbb{K})$$

**2.5** Soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{N}_1$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On remarque que

$$\forall f \in \mathcal{N} \quad \text{ad}_{u+\lambda v}(f) = (u + \lambda v)f - f(u + \lambda v) = uv - \lambda v f - f u - \lambda f v = \text{ad}_u(f) + \lambda \text{ad}_v(f)$$

d'où  $\text{ad}_{u+\lambda v} = \text{ad}_u + \lambda \text{ad}_v$

D'après la question **2.4**, les matrices de  $\text{ad}_u$ ,  $\text{ad}_v$  et  $\text{ad}_{u+\lambda v}$  dans la base  $\mathcal{B}$  ont la forme

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \rho(u) \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} A' & B' \\ 0 & \rho(v) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ 0 & \rho(u + \lambda v) \end{bmatrix}$$

Mais on sait aussi d'après le cours que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_{u+\lambda v}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_u + \lambda \text{ad}_v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_u) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_v)$$

d'où  $\begin{bmatrix} A'' & B'' \\ 0 & \rho(u + \lambda v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ 0 & \rho(u) + \lambda \rho(v) \end{bmatrix}$

Conclusion :  $\forall u, v \in \mathcal{N}_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \rho(u + \lambda v) = \rho(u) + \lambda \rho(v)$

L'application  $\rho$  est linéaire de  $\mathcal{N}_1$  dans  $M_{d-r}(\mathbb{K})$ .

Ensuite, si  $f \in \mathcal{N}_1$ , on a d'une part

$$\text{ad}_{[u,v]}(f) = [u, v]f - f[u, v] = (uv - vu)f - f(uv - vu)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \text{ad}_u \circ \text{ad}_v(f) &= \text{ad}_u(vf - fv) = uvf - ufv - vfu - fvu \\ \text{ad}_v \circ \text{ad}_u(f) &= \text{ad}_v(uf - fu) = vuf - vfu - ufv - fuv \\ (\text{ad}_u \circ \text{ad}_v - \text{ad}_v \circ \text{ad}_u)(f) &= (uv - vu)f - f(uv - vu) = \text{ad}_{[u,v]}(f) \end{aligned}$$

Par suite,  $\text{ad}_{[u,v]} = \text{ad}_u \circ \text{ad}_v - \text{ad}_v \circ \text{ad}_u$

Il vient  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_{[u,v]}) = UV - VU = \begin{bmatrix} \star & \star \\ 0 & \rho(u)\rho(v) - \rho(v)\rho(u) \end{bmatrix}$

Par suite,  $\forall u, v \in \mathcal{N}_1 \quad \rho([u, v]) = \rho(u)\rho(v) - \rho(v)\rho(u) = [\rho(u), \rho(v)]$

**2.6** On note  $N = \text{Im } \rho = \rho(\mathcal{N}_1)$  et faisons quelques observations dessus.

- **N est un sous-espace de  $M_{d-r}(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^{d-r})$ ;**
- **$\dim N \leq \dim \mathcal{N}_1 \leq d - 1$ ;**
- **tout élément de N est nilpotent.** En effet, soit  $u \in \mathcal{N}_1$ ; on note  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et on sait que U est de la forme

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \rho(u) \end{bmatrix}$$

Comme  $u$  est nilpotent, on sait que U est nilpotent. Et d'après la question 1.5,  $\rho(u)$  est aussi nilpotent.

- **N est stable par  $[\ , \ ]$ .** En effet, si  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{N}_1$ , on sait que

$$[\rho(u), \rho(v)] = \rho([u, v])$$

Comme  $\mathcal{N}_1$  est stable par  $[\ , \ ]$ , on sait que  $[u, v] \in \mathcal{N}_1$  donc  $\rho([u, v]) \in N$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $\bigcap_{U \in N} \text{Ker } U \neq \{0\}$

Il existe donc  $X_0 \in \mathbb{K}^{d-r}$ , non nul, tel que

$$\forall U \in N \quad UX_0 = 0$$

Par suite,

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{N}_1 \quad \rho(u)X_0 = 0}$$

**2.7** Donnons un nom aux coordonnées de  $X_0$  :

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{d-r}$$

et posons

$$v_0 = \sum_{k=r+1}^d x_k e_k \in \mathcal{S}$$

Alors

$$[v_0]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{r,1} \\ X_0 \end{bmatrix}$$

À présent, on se donne  $u \in \mathcal{N}_1$ . On sait que la matrice de  $\text{ad}_u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \rho(u) \end{bmatrix}$$

On sait alors que  $[\text{ad}_u(v_0)]_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_u)[v_0]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \rho(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BX_0 \\ \rho(u)X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BX_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

On en déduit que  $\text{ad}_u(v_0) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = \mathcal{N}_1$ .

Il existe  $v_0 \in \mathcal{S}$ , non nul, tel que  $\text{ad}_u(v_0) \in \mathcal{N}_1$  pour tout  $u \in \mathcal{N}_1$ .

**2.8** Notons  $\mathcal{F} = \mathcal{N}_1 \oplus \text{Vect}(v_0)$ . D'après la question précédente,

$$\forall u \in \mathcal{N}_1 \quad [u, v_0] = \text{ad}_u(v_0) \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{F}$$

De plus,  $\mathcal{N}_1$  est stable par  $[\cdot, \cdot]$  donc

$$\forall u, v \in \mathcal{N}_1 \quad [u, v] \in \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{F}$$

Et enfin,  $[v_0, v_0] = 0 \in \mathcal{F}$ . On en déduit que  $\mathcal{F}$  est stable par  $[\cdot, \cdot]$ , puisque tout élément de  $\mathcal{F}$  peut s'écrire sous la forme  $u + \lambda v_0$  avec  $u \in \mathcal{N}_1$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Mais on a  $r = \dim \mathcal{N}_1 < \dim \mathcal{F}$ . Par définition de  $r$ , on a  $\mathcal{F} = \mathcal{N}$ . Par conséquent,

$$d = \dim \mathcal{N} = \dim(\mathcal{N}_1 \oplus \text{Vect}(v_0)) = r + 1$$

et

$$\dim \mathcal{N}_1 = d - 1$$

**2.9** On note  $E_1 = \bigcap_{u \in \mathcal{N}_1} \text{Ker } u$ . Soient  $x \in E_1$  et  $f \in \mathcal{N}$ ; on doit montrer que  $f(x) \in E_1$ .

Soit  $u \in \mathcal{N}_1$ . On a montré à la question **2.8** que  $[u, f] \in \mathcal{N}_1$ . On a donc

$$uf = [u, f] + fu$$

donc

$$uf(x) = \underbrace{[u, f](x)}_{=0} + f \underbrace{u(x)}_{=0} = 0$$

et

$$f(x) \in \bigcap_{u \in \mathcal{N}_1} \text{Ker } u$$

$E_1$  est un sous-espace de  $E$ , stable par tous les éléments de  $\mathcal{N}$ .

**2.10** Il est temps de conclure. Observons que :

- $E_1$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , d'après  $\mathcal{P}(d-1)$ , qu'on peut utiliser puisque  $\mathcal{N}_1$  est de dimension  $d-1$ .



- Si  $u \in \mathcal{N}$ , on a vu que  $u(E_1) \subset E_1$ . Donc on peut définir l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi(u) : E_1 &\longrightarrow E_1 \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

On vérifie très facilement que

$$\forall u, v \in \mathcal{N} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \phi(u + \lambda v) = \phi(u) + \lambda \phi(v)$$

et 
$$\forall u, v \in \mathcal{N} \quad \phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$$

Alors  $\forall u, v \in \mathcal{N} \quad [\phi(u), \phi(v)] = \phi(u)\phi(v) - \phi(v)\phi(u) = \phi(uv - vu) = \phi([u, v])$

Par suite,  $\tilde{\mathcal{N}} = \text{Im } \phi$  est un sous-espace de  $\mathcal{L}(E_1)$ , stable par  $[\ , \ ]$ . Et l'on a, d'après le cours,  $\dim \tilde{\mathcal{N}} \leq \dim \mathcal{N} = d - 1$ .

On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence pour dire que

$$\bigcap_{u \in \mathcal{N}} \text{Ker } \phi(u) \neq \{0\}$$

Cela signifie qu'il existe un  $x \in E_1$ , non nul, tel que

$$\forall u \in \mathcal{N} \quad \phi(u)(x) = 0$$

donc 
$$\forall u \in \mathcal{N} \quad u(x) = 0$$

Conclusion : 
$$\bigcap_{u \in \mathcal{N}} \text{Ker } u \neq 0$$

Ceci achève de démontrer  $\mathcal{P}(d)$ .

**2.11** On démontre le **théorème 1** par récurrence sur la dimension de  $E$ . On définit, pour tout entier  $n$  non nul, la propriété  $\mathcal{Q}(n)$  « : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{N}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , stable par composition, et tel que tout élément de  $\mathcal{N}$  est nilpotent. Alors il existe une base de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure stricte pour tout  $f \in \mathcal{N}$ . »

- **$\mathcal{Q}(1)$  est vraie** : En effet, si  $E$  est de dimension 1, le seul endomorphisme nilpotent de  $E$  est l'application nulle. Sa matrice est triangulaire supérieure, dans n'importe quelle base de  $E$ .
- **$\mathcal{Q}$  est héréditaire** : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie. On se donne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , de dimension  $n + 1$ , et un sous-espace  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{L}(E)$ , stable par composition, tel que tout élément de  $\mathcal{N}$  est nilpotent.

Puisque  $\mathcal{N}$  est stable par composition, il est stable par  $[\ , \ ]$ . On peut donc appliquer le théorème d'Engel pour dire qu'il existe  $x_1 \in E$ , non nul, tel que

$$\forall u \in \mathcal{N} \quad u(x_1) = 0$$

On peut compléter  $(x_1)$  en une base  $\mathcal{B}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  de  $E$ . Si  $u \in \mathcal{N}$ , sa matrice dans la base  $\mathcal{B}_1$  a la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{bmatrix} 0 & B(u) \\ 0 & D(u) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B(u) \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D(u) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

De la même manière qu'à la question 2.5, on montre facilement que  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_n(\mathbb{K}))$  et que

$$\forall u, v \in \mathcal{N} \quad D(uv) = D(u)D(v)$$

De plus, comme  $u$  est nilpotent, sa matrice dans la base  $\mathcal{B}_1$  est aussi nilpotente. D'après la question 1.5, on sait que  $D(u)$  est aussi nilpotent.

Par suite, l'ensemble  $\mathcal{N}' = \text{Im } D$  est un sous-espace de  $M_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ , formé d'endomorphismes nilpotents, et stable par produit. D'après l'hypothèse de récurrence  $\mathcal{P}(n)$ , il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{K}^n$ , telle que pour tout  $u \in \mathcal{N}$ , la matrice de  $D(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est triangulaire supérieure. On la note  $T(u)$ . En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{C}$ , on a d'après les formules de changement de base :

$$P^{-1}T(u)P = D(u)$$

$$\text{On en déduit que} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B(u) \\ 0 & T(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B(u)P \\ 0 & P^{-1}T(u)P \end{bmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$$

Les matrices  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$  sont inverses l'une de l'autre donc peuvent être vues comme des matrices de changement de base.

Enfin, la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & B(u) \\ 0 & T(u) \end{bmatrix}$  est triangulaire supérieure stricte, car  $T(u)$  l'est.

Ceci achève de démontrer  $\mathcal{P}(n+1)$ .

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  et le **théorème 1** est vrai.