

Trigonalisation simultanée d'endomorphismes nilpotents

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés avancées des endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel. Rappelons quelques définitions.

Définition 1 : Soit A un anneau. Un élément de $a \in A$ est dit *nilpotent* si, et seulement si, il existe un entier n tel que $a^n = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier n vérifiant cette propriété est appelé *l'indice de nilpotence de a* .

Définition 2 : Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau et $B \subset A$. On dit que B est *stable par \cdot* si, et seulement si, pour tous a et a' dans B , on a $aa' \in B$.

Définition 3 : Soit A un anneau. Pour tous a et b dans A , on appelle *crochet de a et b* l'élément $[a, b] = ab - ba$.

Définition 4 : Soient A un anneau et $B \subset A$. On dit que B est *stable par $[\cdot, \cdot]$* si, et seulement si, pour tous $a, b \in B$, on a $[a, b] \in B$.

Dans ce problème, on va démontrer le

Théorème 1 : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{N} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable par composition, et tel que tout élément de \mathcal{N} est nilpotent. Il existe une base \mathcal{B} de E , telle que pour tout $f \in \mathcal{N}$, la matrice de f dans la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure stricte.

La première partie étudie les propriétés générales des endomorphismes nilpotents. La deuxième s'attache à démontrer le **théorème d'Engel**, qui servira à prouver le **théorème 1**.

Partie 1 : Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans ce qui suit, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, d'indice de nilpotence d . Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est libre. Montrer que $d \leq n$.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose $V_0 = \{0\}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, V_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

Soit u un endomorphisme de E , tel que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(V_k) \subset V_{k-1}$$

Montrer que u est nilpotent. En déduire qu'une matrice carrée triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

3. Soit u un endomorphisme nilpotent de E , d'indice d . Montrer que

$$\{0\} = \text{Ker } u^0 \subsetneq \text{Ker } u \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } u^{d-1} \subsetneq \text{Ker } u^d = E$$

Prouver alors qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que (en utilisant les mêmes notations qu'à la question précédente) :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(V_k) \subset V_{k-1}$$

4. Soient \mathcal{B} une base de \mathbb{K}^2 et u, v deux endomorphismes de \mathbb{K}^2 tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il n'existe pas de base de \mathbb{K}^2 , dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures strictes.

5. Soient m et p deux entiers non nuls. On se donne

$$A \in M_m(\mathbb{K}) \quad B \in M_{m,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D \in M_p(\mathbb{K})$$

On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Montrer que M est nilpotente si, et seulement si, A et D sont nilpotentes.

6. Donner un exemple de matrice nilpotente qui n'a aucun coefficient nul.

Partie 2 : Le théorème d'Engel

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera ad_u l'application :

$$\begin{aligned} \text{ad}_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f &\longmapsto [u, f] = uf - fu \end{aligned}$$

On va démontrer dans cette partie le

Théorème d'Engel : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{N} un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, stable par $[\cdot, \cdot]$, dont tous les éléments sont nilpotents. Alors $\bigcap_{u \in \mathcal{N}} \text{Ker } u \neq \{0\}$.

On démontre ce résultat par récurrence. Pour tout entier d , on définit la propriété $\mathcal{P}(d)$: « Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{N} un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, de dimension d , stable par $[\cdot, \cdot]$, dont tous les éléments sont nilpotents. Alors $\bigcap_{u \in \mathcal{N}} \text{Ker } u \neq \{0\}$. »

1. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{ad}_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et que si u est nilpotent, ad_u est aussi nilpotent.
2. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Dans toute la suite, $d \geq 2$ est un entier et on suppose que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(d-1)$ sont vraies. E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{N} est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, de dimension d , stable par $[\cdot, \cdot]$ et dont tous les éléments sont nilpotents.

On observe que si $u \in \mathcal{N}$, alors $\text{ad}_u(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ donc ad_u définit un endomorphisme de \mathcal{N} , qu'on note encore ad_u .

3. On définit $r = \text{Max}\{\dim \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ s-e.v. strict de } \mathcal{N} \text{ et } \mathcal{F} \text{ stable par } [\cdot, \cdot]\}$.

Montrer que $0 < r < d$.

On choisit un sous-espace \mathcal{N}_1 de \mathcal{N} , de dimension r , stable par $[\cdot, \cdot]$. Soit \mathcal{S} un supplémentaire de \mathcal{N}_1 dans \mathcal{N} . Soient (e_1, \dots, e_r) une base de \mathcal{N}_1 et (e_{r+1}, \dots, e_d) une base de \mathcal{S} . Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ est une base de \mathcal{N} .

4. Soit $u \in \mathcal{N}_1$. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{ad}_u)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in M_r(\mathbb{K}) \quad B \in M_{r, d-r}(\mathbb{K}) \quad D \in M_{d-r}(\mathbb{K})$$

La matrice D est maintenant notée $\rho(u)$.

5. Montrer que
- $$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &\longrightarrow M_{d-r}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \rho(u) \end{aligned}$$

est une application linéaire telle que

$$\forall u, v \in \mathcal{N}_1 \quad [\rho(u), \rho(v)] = \rho([u, v])$$

6. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbb{K}^{d-r}$, non nul, tel que $\rho(u)X_0 = 0$ pour tout $u \in \mathcal{N}_1$.
7. En déduire qu'il existe $v_0 \in \mathcal{S}$, non nul, tel que $\text{ad}_u(v_0) \in \mathcal{N}_1$ pour tout $u \in \mathcal{N}_1$.
8. En déduire que $\dim \mathcal{N}_1 = d - 1$.
9. Soit $E_1 = \bigcap_{u \in \mathcal{N}_1} \text{Ker } u$. Montrer que E_1 est un sous-espace de E , stable par tous les éléments de \mathcal{N} .
10. En déduire que $\mathcal{P}(d)$ est vraie.
11. Application : Démontrer le **théorème 1**.